Matemática

M1 — Trigonometria no ciclo

p. 7

1 Expresse:

a) 45° em radianos $\frac{\pi}{4}$ rad

b) 330° em radianos $\frac{11\pi}{6}$ rad

c) 225° em radianos $\frac{5\pi}{4}$ rad

d) $\frac{\pi}{3}$ rad em graus 60°

e) $\frac{11\pi}{12}$ rad em graus 165°

f) $\frac{33\pi}{24}$ rad em graus 247° 30'

Resolução:

a) 180° ——— π rad
45° ——— x

$$\frac{180°}{45°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 45°}{180°} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

b) 180° ——— π rad
330° ——— x

$$\frac{180°}{330°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 330°}{180°} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \text{ rad}$$

c) 180° ——— π rad
225° ——— x

$$\frac{180°}{225°} = \frac{\pi}{x} \rightarrow x = \frac{\pi \cdot 225°}{180°} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \text{ rad}$$

d) 180° ——— π rad
x ——— $\frac{\pi}{3}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{\pi}{3}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 60°$$

e) 180° ——— π rad
x ——— $\frac{11\pi}{12}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{11\pi}{12}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{11\pi}{12} \rightarrow x = 165°$$

f) 180° ——— π rad
x ——— $\frac{33\pi}{24}$ rad

$$\frac{180°}{x} = \frac{\pi}{\frac{33\pi}{24}} \rightarrow \pi x = 180° \cdot \frac{33\pi}{24} \rightarrow x = 247{,}5° = 247°\,30'$$

2 (Mackenzie-SP) O ponteiro dos minutos de um relógio mede 4 cm. Supondo $\pi = 3$, a distância, em centímetros, que a extremidade desse ponteiro percorre em 25 minutos é:

a) 15
b) 12
c) 20
d) 25
e) 10

Resolução:

Em 60 minutos o ponteiro dá uma volta, que é o comprimento da circunferência $C = 2\pi r$, em que $\pi = 3$ e $r = 4$.

$60' \text{ ——— } 2\pi r$

$25' \text{ ——— } x$

$$x = \frac{2\pi r \cdot 25}{60} \rightarrow x = \frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 25}{60} \rightarrow x = 10 \text{ cm}$$

3 Um arco de circunferência mede 210° e seu comprimento é 2 km. Qual a medida do raio em metros? Use $\pi = 3{,}14$. aproximadamente 546 m

Resolução:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\ell}{r}$$

$\ell = 2 \text{ km} = 2\,000 \text{ m}$

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$210° \text{ ——— } x$

$$x = \frac{210° \cdot \pi}{180°} = \frac{7\pi}{6} \text{ rad}$$

$$\frac{7\pi}{6} = \frac{2000}{r} \rightarrow r = \frac{6 \cdot 2000}{7\pi} \cong 545{,}9$$

A medida do raio é, aproximadamente, 546 metros.

4 Determine o comprimento de um arco de ângulo central 85°, cujo raio da circunferência é 5 cm. Use $\pi = 3{,}14$. aproximadamente 7,41 cm

Resolução:

$$\alpha \text{ rad} = \frac{\ell}{r}$$

$r = 5 \text{ cm}$

$180° \text{ ——— } \pi \text{ rad}$

$85° \text{ ——— } x$

$$x = \frac{85° \cdot \pi}{180°} = \frac{17\pi}{36} \text{ rad}$$

$$\frac{17\pi}{36} = \frac{\ell}{5} \rightarrow \ell = \frac{5 \cdot 17\pi}{36} \cong 7{,}41$$

O comprimento do arco é, aproximadamente, 7,41 cm.

5 Ao meio-dia, o ponteiro dos minutos de um relógio coincide com o ponteiro das horas. A que horas acontece a próxima coincidência? 13h 5min 27s

Resolução:

Em 3600", o ponteiro das horas percorre 30°, e o dos minutos, 360°.

ponteiro das horas: 3600" ——— 30°

x ——— α

$\alpha = \frac{x}{120}$ (I)

ponteiro dos minutos: 3600" ——— 360°

x ——— 360° + α

$x = \frac{3600 \cdot (360 + \alpha)}{360} \to x = 10 \cdot (360 + \alpha)$ (II)

Substituindo (I) em (II), temos:

$x = 10 \cdot \left(360 + \frac{x}{120}\right) \to x = 3600 + \frac{10x}{120} \to x - \frac{x}{12} = 3600 \to$

$\to \frac{12x - x}{12} = 3600 \to 11x = 43200 \to x = 3927"$

$\frac{3927}{60} = 65'\,27" = 1\text{h}\,5'\,27"$

Portanto, a próxima coincidência acontecerá às 13h 5min 27s.

6 Um circuito de *kart* tem uma pista circular de raio 500 m. Um piloto, para testar a pista e o *kart*, desenvolve uma velocidade constante de 80 km/h. Determine o número de voltas que ele deu na pista, após 15 minutos. 6,3 voltas

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 500 \to C = 3140$ m

Como a velocidade é 80 km/h, em 15 minutos ele andou $\frac{80}{4} = 20$ km $= 20000$ m.

número de voltas $= \frac{20\,000}{3\,140} = 6{,}3$

Após 15 minutos, o piloto deu 6,3 voltas na pista.

7 Ana pretende colocar renda em todo o perímetro de uma toalha circular de raio 1 m. Quantos metros de renda ela deve comprar? 6,30 m

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 1 \to C = 6{,}28$ m

Ela deve comprar 6,30 metros de renda.

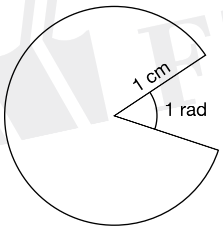
8 Considerando o raio da Terra igual a 6370 km, qual a medida do comprimento da linha do equador? aproximadamente 40003,6 km

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 6370 \rightarrow C = 40\,003{,}6$ km

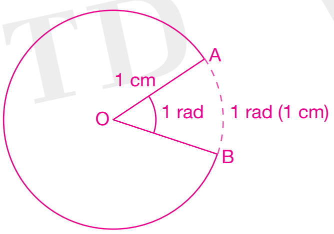
A linha do equador tem, aproximadamente, 40003,6 km.

9 (Unesp-SP) Em um jogo eletrônico, o "monstro" tem a forma de um setor circular de raio 1 cm, como mostra a figura. A parte que falta no círculo é a boca do "monstro", e o ângulo de abertura mede 1 rad. O perímetro do "monstro", em centímetros, é:



a) $\pi - 1$
b) $\pi + 1$
c) $2\pi - 1$
d) 2π
e) $2\pi + 1$

Resolução:



O comprimento do arco menor $\overset{\frown}{AB}$ é 1 cm.

O perímetro do "monstro" é $p = 2\pi r - 1 + 1 + 1 = 2\pi + 1$.

10 Calcule o menor ângulo formado pelos ponteiros de um relógio que está assinalando:

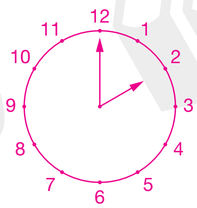
a) 2 h   60°

b) 2h 15min   22° 30’

c) 2h 50min   145°

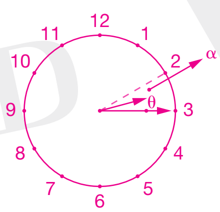
Resolução:

a) 2 h



Em 60’ o ponteiro dos minutos percorre 360°, e o ponteiro das horas, 30°. Então, às 2 horas, o menor ângulo formado é $2 \cdot 30° = 60°$.

b) 2h 15min



Em 60’ o ponteiro das horas percorre 30°; em 15’, percorrerá:

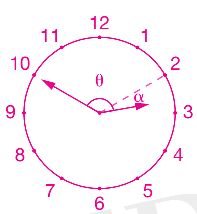
60’ ———— 30°

15’ ———— α

$$\alpha = \frac{15 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 7° 30$$

$$\theta = 30° - \alpha = 30° - 7° 30' \rightarrow \theta = 22° 30'$$

c) 2h 50min



Em 60’ o ponteiro das horas percorre 30°; em 50’, percorrerá:

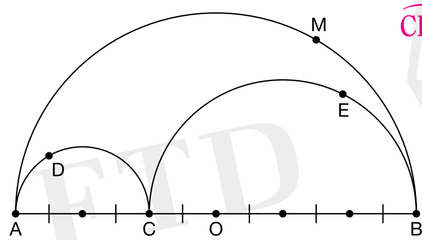
60’ ———— 30°

50’ ———— α

$$\alpha = \frac{50 \cdot 30}{60} \rightarrow \alpha = 25°$$

$$\theta = 120° + \alpha = 120° + 25° \rightarrow \theta = 145°$$

11 Na figura abaixo, os arcos $\overset{\frown}{AMB}$, $\overset{\frown}{ADC}$ e $\overset{\frown}{CEB}$ têm, respectivamente, raios 30 cm, 10 cm e 20 cm. Determine os comprimentos desses arcos. O que podemos concluir? $\overset{\frown}{AMB} = 94{,}2$ cm; $\overset{\frown}{ADC} = 31{,}4$ cm e $\overset{\frown}{CEB} = 62{,}8$ cm



Resolução:

$$\text{arco } \overset{\frown}{AMB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 30}{2} = 94{,}2 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \overset{\frown}{ADC} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 10}{2} = 31{,}4 \text{ cm}$$

$$\text{arco } \overset{\frown}{CEB} = \frac{2\pi r}{2} = \frac{2 \cdot 3{,}14 \cdot 20}{2} = 62{,}8 \text{ cm}$$

Podemos concluir que $\overset{\frown}{AMB} = \overset{\frown}{ADC} + \overset{\frown}{CEB}$.

12 Um grado (1 gr) é um ângulo central que determina na circunferência um arco de comprimento igual a $\frac{1}{400}$ da circunferência. Quantos radianos tem um ângulo de 50 gr? $\frac{\pi}{4}$ rad

Resolução:

2π rad ——— 400 gr

x ——— 50 gr

$$x = \frac{50 \cdot 2\pi}{400} \rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

13 Um ciclista leva 5 minutos para dar uma volta numa pista circular de raio 150 m. Qual o comprimento da pista e qual a velocidade do ciclista em metros por minuto? 942 m e $v = 60\pi$ m/min

Resolução:

$C = 2\pi r = 2 \cdot 3{,}14 \cdot 150 \rightarrow C = 942$ m

$$v = \frac{s}{t} = 2\pi \cdot \frac{150}{5} \rightarrow v = 60\pi \text{ m/min}$$

p. 10

14 Determine as medidas de x, em graus, associadas ao arco e a 45°, nas quatro primeiras voltas positivas. 45°, 405°, 765°, 1 125°

Resolução:

$x_1 = 45°$
$x_2 = 45° + 360° = 405°$
$x_3 = 45° + 720° = 765°$
$x_4 = 45° + 1\,080° = 1\,125°$

15 Determine as medidas de x, em radianos, associadas ao arco de $\frac{\pi}{8}$ nas três primeiras voltas negativas. $-\frac{\pi}{8}, -\frac{17\pi}{8}, -\frac{33\pi}{8}$

Resolução:

$x_1 = -\frac{\pi}{8}$

$x_2 = -\frac{\pi}{8} - 2\pi = -\frac{17\pi}{8}$

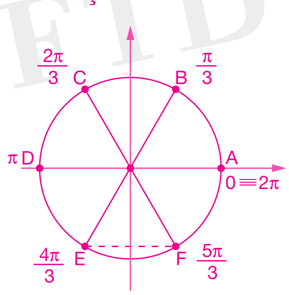
$x_3 = -\frac{\pi}{8} - 4\pi = -\frac{33\pi}{8}$

16 Construa um ciclo trigonométrico e marque os pontos correspondentes a:
$0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}; \frac{3\pi}{3} = \pi; \frac{4\pi}{3}; \frac{5\pi}{3}; \frac{6\pi}{3} = 2\pi.$

a) Qual é o simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem? $\frac{4\pi}{3}$

b) Qual é o simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas? $\frac{5\pi}{3}$

Resolução:



a) O simétrico de $\frac{\pi}{3}$ em relação à origem é $\frac{4\pi}{3}$.

b) O simétrico de $\frac{4\pi}{3}$ em relação ao eixo das ordenadas é $\frac{5\pi}{3}$.

17 Seja o arco de expressão geral: $\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

a) Qual o valor da expressão para k = 0? $\alpha = \frac{\pi}{4}$ b) Qual o valor da expressão para k = 7? $\alpha = \frac{57\pi}{4}$

Resolução:

$\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

a) $k = 0 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

b) $k = 7 \rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + 2 \cdot 7 \cdot \pi = \frac{57\pi}{4}$

18 a) Escreva em graus a expressão geral dos arcos de 20°. $\alpha = 20° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) Qual é a imagem do arco se k = −2? $\alpha = -700°$

Resolução:

a) $\alpha = 20° + 360°k,\ k \in \mathbb{Z}$

b) $\alpha = 20° + 360° \cdot (-2) = -700°$

19 Em que quadrante se encontra a extremidade dos arcos de:

a) −1 690° 2º quadrante

b) 2 490° 4º quadrante

c) $\frac{323\pi}{8}$ 1º quadrante

Resolução:

a) $-1\,690° = (-4) \cdot 360° - 250° \rightarrow$ a primeira determinação é igual a −250°, que se encontra no 2º quadrante.

b) $2\,490° = (6) \cdot 360° + 330° \rightarrow$ a primeira determinação é igual a 330°, que se encontra no 4º quadrante.

c) $\frac{323\pi}{8} = (20) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{8} \rightarrow$ a primeira determinação é $\frac{3\pi}{8}$, que se encontra no 1º quadrante.

20 Descubra a primeira determinação positiva e escreva a expressão geral dos arcos congruentes ao arco de 2310°. $\alpha = 150°$ e $\alpha = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

Resolução:

$$\begin{array}{r|l} 2310° & 360° \\ \cline{2-2} 150° & 6 \end{array}$$

$2\,310° = (6) \cdot 360° + 150°$

A primeira determinação é 150°.

$\alpha = 150° + 360°k, k \in \mathbb{Z}$

21 Determine o raio do círculo percorrido por um ponto, sabendo que em uma volta e meia percorreu uma distância de 9,420 km. 1 km

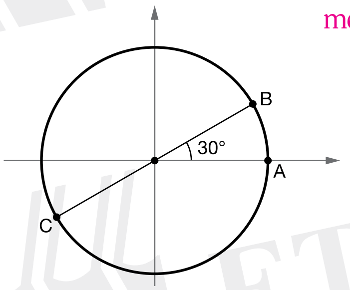
Resolução:

uma volta e meia $= 2\pi r + \pi r = 3\pi r = 9\,420$

$r = \dfrac{9\,420}{3 \cdot 3{,}14} \rightarrow r = 1\,000 \text{ m} = 1 \text{ km}$

22 Determine a medida dos arcos $\overset{\frown}{AB}$ e $\overset{\frown}{AC}$, em radianos, sabendo que estão orientados no sentido horário.

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = -\dfrac{11\pi}{6}$ e $\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = -\dfrac{5\pi}{6}$



Resolução:

$$\begin{array}{rcl} \pi \text{ rad} & \text{———} & 180° \\ x & \text{———} & 30° \end{array}$$

$x = \dfrac{30\pi}{180} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ rad

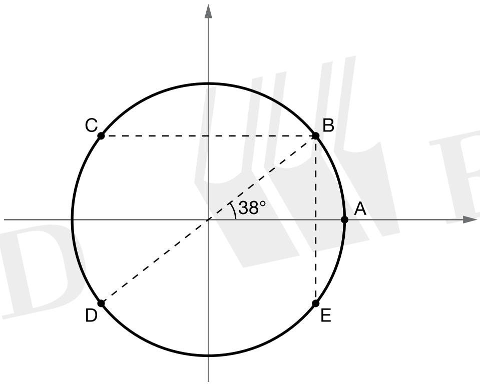
Observando o sentido horário dos arcos, temos:

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AB}) = -2\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{11\pi}{6}$

$\text{med}\,(\overset{\frown}{AC}) = -\pi + \dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{5\pi}{6}$

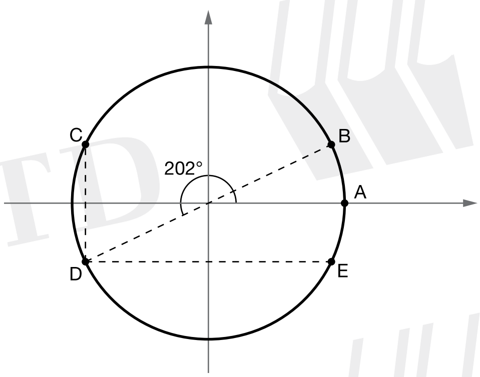
23 Nas figuras a seguir, determine em graus os arcos $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{AC}$, $\overset{\frown}{AD}$ e $\overset{\frown}{AE}$.

a)



med $(\overset{\frown}{AB}) = 38°$
med $(\overset{\frown}{AC}) = 142°$
med $(\overset{\frown}{AD}) = 218°$
med $(\overset{\frown}{AE}) = 322°$

b)



med $(\overset{\frown}{AB}) = 22°$
med $(\overset{\frown}{AC}) = 158°$
med $(\overset{\frown}{AD}) = 202°$
med $(\overset{\frown}{AE}) = 338°$

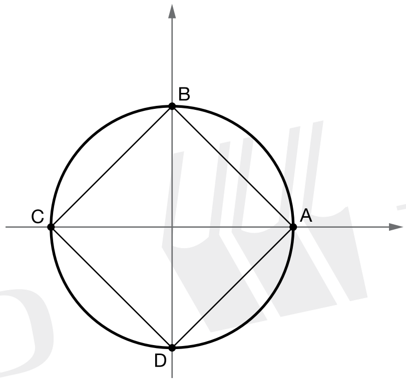
Resolução:

a) med $(\overset{\frown}{AB}) = 38°$
med $(\overset{\frown}{AC}) = 180° - 38° = 142°$
med $(\overset{\frown}{AD}) = 180° + 38° = 218°$
med $(\overset{\frown}{AE}) = 360° - 38° = 322°$

b) med $(\overset{\frown}{AB}) = 202° - 180° = 22°$
med $(\overset{\frown}{AC}) = 180° - 22° = 158°$
med $(\overset{\frown}{AD}) = 180° + 22° = 202°$
med $(\overset{\frown}{AE}) = 360° - 22° = 338°$

24 Os polígonos a seguir são quadrados. Determine em radianos os arcos correspondentes aos vértices.

a)

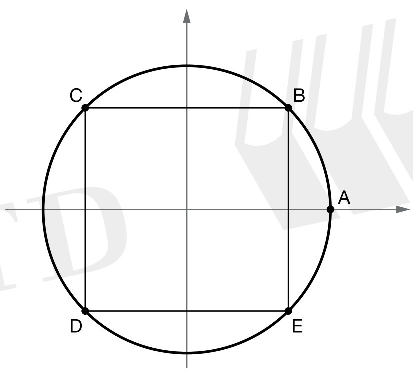


med $(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$

med $(\overset{\frown}{AC}) = \pi$

med $(\overset{\frown}{AD}) = \dfrac{3\pi}{2}$

b)



med $(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AC}) = \dfrac{3\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AD}) = \dfrac{5\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AE}) = \dfrac{7\pi}{4}$

Resolução:

a) $\overset{\frown}{AB}$ é um arco de 90°, equivalente a $\dfrac{\pi}{2}$ rad; então:

med $(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi}{2}$

med $(\overset{\frown}{AC}) = \dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{2} = \pi$

med $(\overset{\frown}{AD}) = \pi + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{2}$

b) BD e CE são diagonais do quadrado; portanto, o arco $\overset{\frown}{AB}$ mede 45° e os arcos $\overset{\frown}{BC}$, $\overset{\frown}{CD}$ e $\overset{\frown}{DE}$ são arcos de 90° ou $\dfrac{\pi}{2}$ rad. Assim:

med $(\overset{\frown}{AB}) = \dfrac{\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AC}) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{3\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AD}) = \dfrac{\pi}{4} + \pi = \dfrac{5\pi}{4}$

med $(\overset{\frown}{AE}) = \dfrac{\pi}{4} + 3 \cdot \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{7\pi}{4}$

25 Associe os valores da segunda coluna aos valores dos senos da primeira coluna:

a: 3, b: 4, c: 2, d: 5, e: 1, f: 6

a) sen 270° — 1. 0

b) cos 315° — 2. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\cos \frac{5\pi}{6}$ — 3. -1

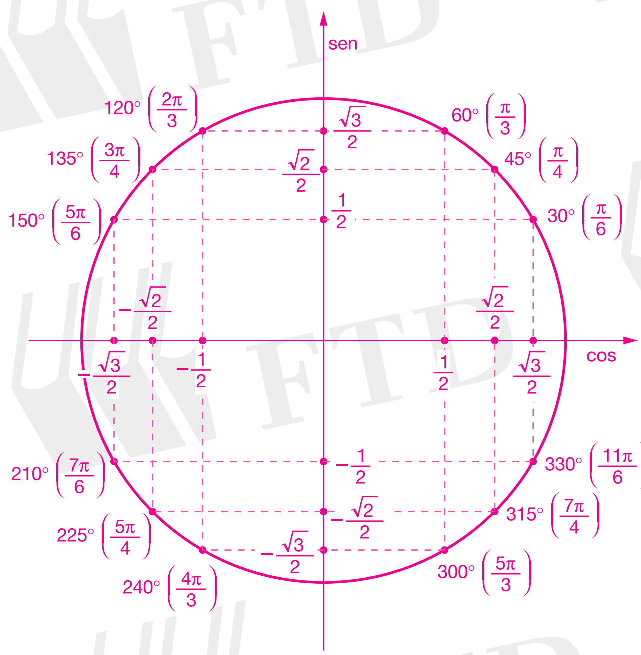
d) $\text{sen } \frac{7\pi}{6}$ — 4. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

e) sen 2π — 5. $-\frac{1}{2}$

f) cos 4π — 6. 1

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo com os ângulos e seus respectivos senos e cossenos, temos:



a) sen 270° $= -1$ (3)

b) cos 315° $= \frac{\sqrt{2}}{2}$ (4)

c) $\cos \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ (2)

d) $\text{sen } \frac{7\pi}{6} = -\frac{1}{2}$ (5)

e) sen $2\pi = 0$ (1)

f) $\cos 4\pi = \cos 2\pi = 1$ (6)

26 Determine os valores de:

a) $\text{sen } \frac{19\pi}{4}$ $\frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\text{sen } 675°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $\text{sen } 5\pi$ 0

d) $\text{sen } 150°$ $\frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3}$ $-\frac{1}{2}$

f) $\cos 1\,305°$ $-\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{3\pi}{2}$ 0

h) $\cos 1\,000\pi$ 1

Resolução:

a) $\frac{19\pi}{4} = 4\pi + \frac{3\pi}{4} \rightarrow \text{sen } \frac{19\pi}{4} = \text{sen } \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b) $675° = 360° + 315° \rightarrow \text{sen } 675° = \text{sen } 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

c) $5\pi = \pi + 4\pi \rightarrow \text{sen } 5\pi = \text{sen } \pi = 0$

d) $\text{sen } 150° = \frac{1}{2}$

e) $\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$

f) $1\,305° = (3) \cdot 360° + 225° \rightarrow \cos 1\,305° = \cos 225° = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

g) $\cos \frac{3\pi}{2} = 0$

h) $1\,000\pi = (500) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 1\,000\pi = \cos 2\pi = 1$

27 Determine o valor da expressão: $A = \cos 10\pi + \text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$ -1

Resolução:

$10\pi = (5) \cdot 2\pi \rightarrow \cos 10\pi = \cos 2\pi = 1$

$\frac{15\pi}{2} = (3) \cdot 2\pi + \frac{3\pi}{2} \rightarrow \text{sen } \frac{15\pi}{2} = \text{sen } \frac{3\pi}{2} = -1$

$\text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} = 1$

$A = \cos 10\pi + \text{sen}\left(\frac{15\pi}{2}\right) - \text{sen}\left(-\frac{3\pi}{2}\right) = 1 + (-1) - 1 = -1$

28 Calcule sen (−60°) e cos (−45°). $\text{sen}\,(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

$\text{sen}\,(-\alpha) = -\text{sen}\,\alpha \rightarrow \text{sen}\,(-60°) = -\text{sen}\,60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha \rightarrow \cos(-45°) = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\therefore\ \text{sen}\,(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\cos(-45°) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

29 Simplifique: $A = \text{sen}\,(11\pi - x) + \cos(7\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{3}$. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Resolução:

$11\pi = (5) \cdot 2\pi + \pi;\ 7\pi = (3) \cdot 2\pi + \pi;\ x = \frac{\pi}{3}$

$A = \text{sen}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) \rightarrow A = \text{sen}\,\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{4\pi}{3} \rightarrow A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow A = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

30 Se $\alpha + \beta = 270°$ e $\alpha - \beta = 210°$, determine o valor de $\cos\alpha + \cos\beta$. $\frac{\sqrt{3} - 1}{2}$

Resolução:

$$\begin{cases} \alpha + \cancel{\beta} = 270° \\ \alpha - \cancel{\beta} = 210° \end{cases}$$

$2\alpha = 480° \rightarrow \alpha = 240°$

Substituindo α, temos:

$\alpha + \beta = 270° \rightarrow 240° + \beta = 270° \rightarrow \beta = 30°$

Então: $\cos 240° + \cos 30° = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$.

31 Se $\alpha = 1380°$, determine o valor de $\text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha$. $-\frac{\sqrt{3}}{4}$

Resolução:

$1380° = (3) \cdot 360° + 300°$

$\text{sen}\ 300° \cdot \cos 300° = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

$\therefore\ \text{sen}\ \alpha \cdot \cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{4}$

32 Calcule o valor da expressão: $A = \frac{\text{sen}\ 5x + \cos 10x}{\text{sen}\ 9x}$, para $x = 30°$. -1

Resolução:

$A = \frac{\text{sen}\ 5x + \cos 10x}{\text{sen}\ 9x} = \frac{\text{sen}\ 5 \cdot 30 + \cos 10 \cdot 30}{\text{sen}\ 9 \cdot 30} \rightarrow$

$\rightarrow A = \frac{\text{sen}\ 150° + \cos 300°}{\text{sen}\ 270°} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{-1} \rightarrow A = -1$

33 Se $\text{sen}\ \frac{5\pi}{18} = a$, qual o sinal de *a*? Qual o valor do $\text{sen}\ \frac{13\pi}{18}$ em função de *a*? *a* é positivo e $\text{sen}\ \frac{13\pi}{18} = a$.

Resolução:

π ——— $180°$

$\frac{5\pi}{18}$ ——— x

$\frac{\pi}{\frac{5\pi}{18}} = \frac{180}{x} \rightarrow x = \frac{180 \cdot \frac{5\pi}{18}}{\pi} \rightarrow x = 50°$

Portanto, é um ângulo do primeiro quadrante e seu seno é positivo.

Se $\frac{13\pi}{18} = \pi - \frac{5\pi}{18}$ e $\text{sen}\ x = \text{sen}\ (\pi - x)$, então:

$\text{sen}\ \frac{5\pi}{18} = \text{sen}\left(\pi - \frac{5\pi}{18}\right) = \text{sen}\ \frac{13\pi}{18} = a$

Então, *a* é positivo e $\text{sen}\ \frac{13\pi}{18} = a$.

34 Se $\operatorname{sen} x = \frac{1}{3}$, determine:

a) $\operatorname{sen}(\pi - x)$ $\frac{1}{3}$

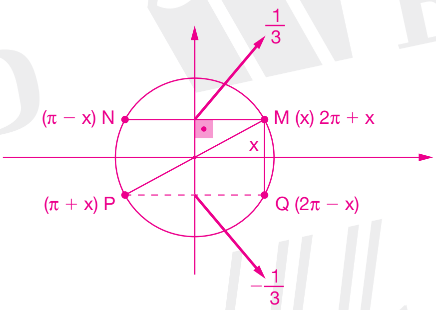
b) $\operatorname{sen}(\pi + x)$ $-\frac{1}{3}$

c) $\operatorname{sen}(2\pi - x)$ $-\frac{1}{3}$

d) $\operatorname{sen}(2\pi + x)$ $\frac{1}{3}$

Resolução:

Observando o ciclo trigonométrico abaixo, temos:



a) $\operatorname{sen}(\pi - x) = \frac{1}{3}$

b) $\operatorname{sen}(\pi + x) = -\frac{1}{3}$

c) $\operatorname{sen}(2\pi - x) = -\frac{1}{3}$

d) $\operatorname{sen}(2\pi + x) = \frac{1}{3}$

35 (Unesp-SP – modificado) Do solo, você observa um amigo numa roda-gigante. A altura em metros de seu amigo em relação ao solo é dada pela expressão: $h(t) = 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12}(t - 26)\right]$, em que o tempo é dado em segundos e a medida angular em radianos. A que altura seu amigo se encontrava do solo quando a roda começou a girar ($t = 0$)? 6,5 m

Resolução:

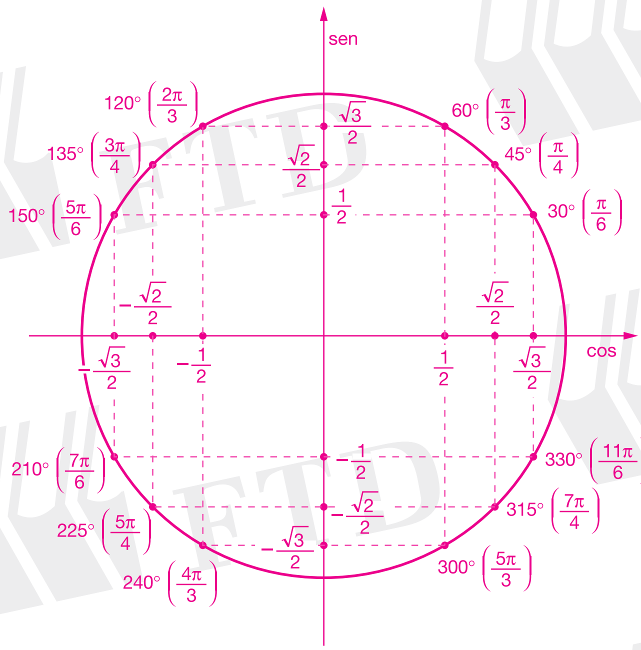
$$h(t) = 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12} \cdot (t - 26)\right]$$

$$h(0) = 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left[\frac{\pi}{12} \cdot (0 - 26)\right] \rightarrow h(0) = 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left[-\frac{13\pi}{6}\right] \rightarrow$$

$$\rightarrow h(0) = 11{,}5 + 10 \operatorname{sen}\left[-\frac{\pi}{6}\right] = 11{,}5 - 5 = 6{,}5 \text{ m}$$

36 Para que valores de x temos sen x = cos x, se $0° \leqslant x < 360°$? 45° e 225°

Resolução:



Pelo ciclo trigonométrico, podemos concluir que sen x = cos x, para x = 45° e para x = 225°.

37 O fenômeno da maré em determinado ponto da costa brasileira pode ser obtido pela expressão:
$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot t + \frac{5\pi}{4}\right)$, em que t é o tempo decorrido após o início da operação (t = 0), e P(t) é a profundidade da água no instante t. Qual é a profundidade da água no início da operação? 9 m

Resolução:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6} \cdot 0 + \frac{5\pi}{4}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow P(0) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{21}{2} + 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \rightarrow P(0) = 9{,}0$$

A profundidade da água no início da operação é 9 metros.

p. 22

38 Construa o gráfico das funções a seguir, dando o domínio, a imagem e o período.

a) $y = 2 - \cos x$ b) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ c) $y = \left|3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

Resolução:

a) $y = 2 - \cos x$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

x	cos x	2 − cos x
0	1	1
$\frac{\pi}{2}$	0	2
π	−1	3
$\frac{3\pi}{2}$	0	2
2π	1	1

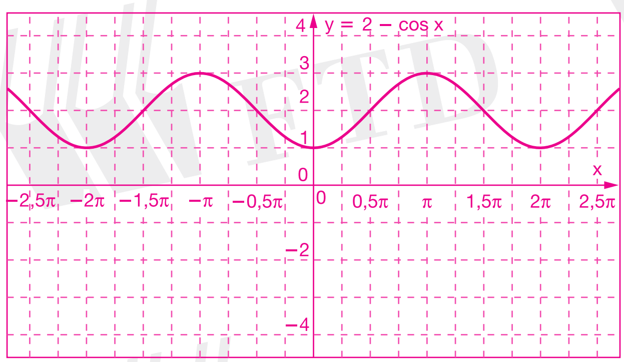
1º quadrante → crescente

2º quadrante → crescente

3º quadrante → decrescente

4º quadrante → decrescente

Esboçando o gráfico da função, temos:



$D = \mathbb{R}$

$Im(f) = [1, 3]$

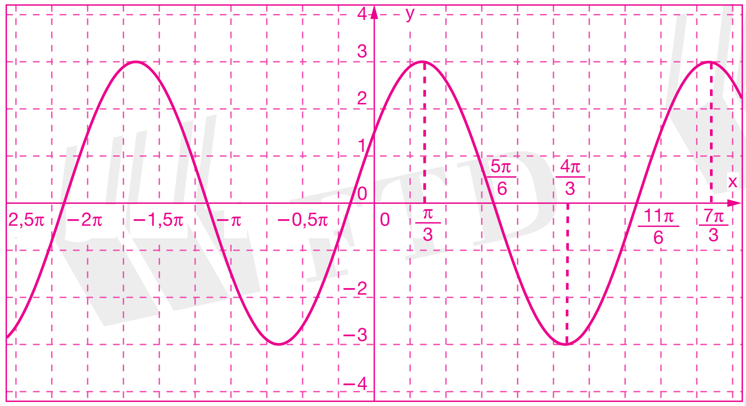
$P = 2\pi$

b) $y = 3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{3}$	x	$\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$	$3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$
0	$\frac{\pi}{3}$	1	3
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{6}$	0	0
π	$\frac{4\pi}{3}$	−1	−3
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{11\pi}{6}$	0	0
2π	$\frac{7\pi}{3}$	1	3

Esboçando o gráfico da função, temos:



D = $\mathbb{R}$

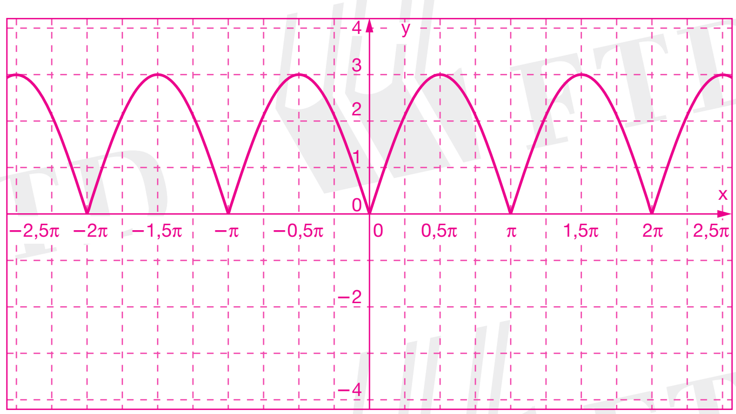
Im(f) = [−3, 3]

$P = 7\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{3} = 2\pi$

c) $y = \left|3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right|$

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x + \frac{\pi}{2}$	x	$\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$	$\left\lvert 3\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right\rvert$
0	$-\frac{\pi}{2}$	1	3	3
$\frac{\pi}{2}$	0	0	0	0
π	$\frac{\pi}{2}$	−1	−3	3
$\frac{3\pi}{2}$	π	0	0	0
2π	$\frac{3\pi}{2}$	1	3	3



D = $\mathbb{R}$

Im(f) = [0, 3]

P = π

39 Determine o período da função: $f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. $p = 4\pi$

Resolução:

$f(x) = \text{sen}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$

$0 \leqslant \frac{x}{2} + \frac{\pi}{3} \leqslant 2\pi \rightarrow -\frac{\pi}{3} \leqslant \frac{x}{2} \leqslant 2\pi - \frac{\pi}{3} \rightarrow -\frac{2\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{10\pi}{3}$

$p = \frac{10\pi}{3} - \left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{10\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} = \frac{12\pi}{3} \rightarrow p = 4\pi$

40 Seja a função real $f(x) = 2 \cos ax$. Qual o valor de *a* para que o período dessa função seja 6π? $a = \frac{1}{3}$

Resolução:

$f(x) = 2 \cos ax$

$0 \leqslant ax \leqslant 2\pi \rightarrow 0 \leqslant x \leqslant \frac{2\pi}{a}$

$p = \frac{2\pi}{a} - 0 \rightarrow p = \frac{2\pi}{a}$

$p = 6\pi \rightarrow \frac{2\pi}{a} = 6\pi \rightarrow a = \frac{1}{3}$

41 (FGV-SP) Para que valores de *m*, a equação na incógnita *x*, $2 \text{ sen } x - 1 = 3m$, admite solução?
$-1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$

Resolução:

$2 \text{ sen } x - 1 = 3m$

$\text{sen } x = \frac{3m + 1}{2}$

Como $-1 \leqslant \text{sen } x \leqslant 1$, então:

$-1 \leqslant \frac{3m + 1}{2} \leqslant 1 \rightarrow -2 \leqslant 3m + 1 \leqslant 2 \rightarrow -3 \leqslant 3m \leqslant 1 \rightarrow -1 \leqslant m \leqslant \frac{1}{3}$

42 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $y = \frac{1}{1 - \text{sen } x}$. Qual é o domínio da função no intervalo $[0, 2\pi]$?

$D = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$

Resolução:

$1 - \text{sen } x \neq 0 \to \text{sen } x \neq 1 \to x \neq \frac{\pi}{2}$

Então, $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{2}\right\}$.

43 Qual é a imagem da função $f(x) = -2 + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$? $\text{Im} = [-5, 1]$

Resolução:

$-1 \leqslant \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$-3 \leqslant 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 3$

$-2 - 3 \leqslant -2 + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant -2 + 3$

$-5 \leqslant -2 + 3\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1$

$\text{Im}(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid -5 \leqslant y \leqslant 1\} = [-5, 1]$

44 Seja a função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2\cos x$. Considere as afirmações:

I. f(x) é uma função par.
II. f(x) é uma função periódica de período 2π.
III. A imagem de $f(x) = [-1, 1]$.

Podemos afirmar que:

a) I e II são verdadeiras, e III é falsa.
b) I é falsa, e II e III são verdadeiras.
c) I e III são verdadeiras, e II é falsa.
d) todas são verdadeiras.
e) todas são falsas.

Resolução:

I. (Verdadeira) $\to 2\cos x = 2\cos(-x)$; portanto, a função é par.
II. (Verdadeira) $\to 2\cos x = 2\cos(x + 2k\pi)$; então, $p = 2\pi$.
III. (Falsa) $\to -1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \to -2 \leqslant 2\cos x \leqslant 2 \to \text{Im}(f) = [-2, 2]$

45 O custo de *x* dezenas de certo produto é dado pela função: $C(x) = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ em milhares de reais. Qual é o valor do custo mínimo desses produtos? Quantas dezenas podem ser fabricadas por esse custo? 2 000 reais; 1,5 dezena

Resolução:

$-1 \leqslant \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \leqslant 1$

Portanto, o valor máximo de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ é 1, e o custo só será mínimo quando $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$ for máximo.

$C(x) = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right)$

$C(x) = 3 - 1 = 2 \rightarrow$ o valor do custo mínimo é 2 000 reais.

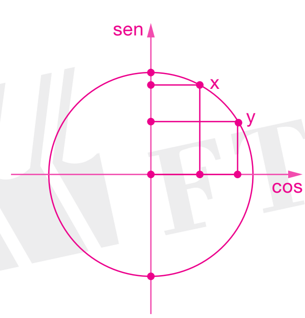
$2 = 3 - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = 1 \rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{3}x\right) = \text{sen}\,\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{3}x = \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3}{2} = 1{,}5$

O custo mínimo desses produtos é R$ 2 000,00 e pode ser fabricada 1,5 dezena por esse custo.

46 Se sen x > sen y, $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ e ainda $0 \leqslant y \leqslant \frac{\pi}{2}$, podemos afirmar que:

a) $x = y$
b) $x < y$
c) $\text{sen}\,x < 0$
d) $\cos x < \cos y$
e) $\cos x, \text{sen}\,y < 0$

Resolução:



No ciclo acima verificamos que se sen x > sen y, então: x > y e cos y > cos x.

47 A função f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 2\cos\frac{x}{3}$ é:

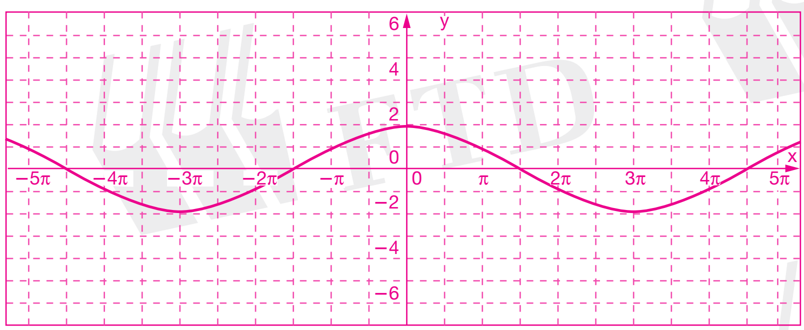
a) decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$
b) crescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$
c) decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 6\pi$
d) crescente para $0 \leqslant x \leqslant 6\pi$
e) crescente para $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant 3\pi$

Resolução:

Fazendo a tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$\frac{x}{3}$	x	$\cos\frac{x}{3}$	$2\cos\frac{x}{3}$
0	0	1	2
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	0	0
π	3π	-1	-2
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{2}$	0	0
2π	6π	1	2

Esboçando o gráfico da função, temos:



Portanto, a resposta certa é a alternativa *a*, pois a função é decrescente para $0 \leqslant x \leqslant 3\pi$.

48 O valor máximo da função $f(x) = 3 \text{ sen } \frac{x}{2}$ é:

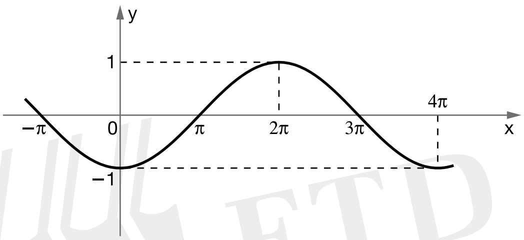
a) 3
b) 2
c) 1
d) -1
e) 0

Resolução:

$-1 \leq \text{sen } \frac{x}{2} \leq 1 \rightarrow -3 \leq 3 \text{ sen } \frac{x}{2} \leq 3$

Portanto, o valor máximo é 3.

49 A figura a seguir representa o gráfico da função $y = a \cos bx$.



Os valores de *a* e *b* são, respectivamente:

a) -1 e 2
b) -1 e 1
c) -1 e $\frac{1}{2}$
d) 1 e 2
e) 1 e $\frac{1}{2}$

Resolução:

Observando o gráfico, temos:

Se $bx = 0 \rightarrow x = 0$

Se $bx = 2\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{b}$

$p = \frac{2\pi}{b} - 0 = \frac{2\pi}{b} = 4\pi \rightarrow b = 2$

Como a imagem da função é $[-1, 1]$, então $a = 1$.

50 (ITA-SP) Sejam *f* e *g* duas funções definidas por:

$$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\,\text{sen}\,x - 1} \quad e \quad g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,\text{sen}^2 x - 1}, x \in \mathbb{R}$$

A soma do valor mínimo de *f* com o valor mínimo de *g* é igual a:

a) 0

b) $-\frac{1}{4}$

c) $\frac{1}{4}$

d) $\frac{1}{2}$

e) 1

Resolução:

$f(x) = \left(\sqrt{2}\right)^{3\,\text{sen}\,x - 1}$; $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3\,\text{sen}^2 x - 1}$

f será mínimo se sen x = −1, e *g* será mínimo se $\text{sen}^2 x = 1$.

$f_{min} = \left(\sqrt{2}\right)^{-3 - 1} = \frac{1}{4}$

$g_{min} = \left(\frac{1}{2}\right)^{3 - 1} = \frac{1}{4}$

$f_{min} + g_{min} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

51 (FGV-SP) Considere a função $f(x) = 2 - \frac{3\cos^2 x}{4}$. Os valores máximo e mínimo de f(x) são, respectivamente:

a) 1 e −1

b) 1 e 0

c) 2 e $-\frac{3}{4}$

d) 2 e 0

e) 2 e $\frac{5}{4}$

Resolução:

$f(x) = 2 - \frac{3\cos^2 x}{4}$

$-1 \leqslant \cos x \leqslant 1 \rightarrow 0 \leqslant \cos^2 x \leqslant 1 \rightarrow 0 \leqslant 3\cos^2 x \leqslant 3 \rightarrow 0 \leqslant \frac{3}{4}\cos^2 x \leqslant \frac{3}{4} \rightarrow$

$\rightarrow 0 \geqslant -\frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant -\frac{3}{4} \rightarrow 2 \geqslant 2 - \frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant 2 - \frac{3}{4} \rightarrow 2 \geqslant 2 - \frac{3}{4}\cos^2 x \geqslant \frac{5}{4}$

Portanto, o valor máximo é 2, e o valor mínimo é $\frac{5}{4}$.

p. 28

52 Determine os valores de:

a) $\text{tg}\,(-420°)$ $-\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,420°$ $\sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,4\,000\pi$ 0

d) $\text{tg}\,7\,001\pi$ 0

e) $\text{tg}\,\frac{15\pi}{6}$ não existe

Resolução:

a) $\text{tg}\,(-420°) = \text{tg}\,(-60°) = -\text{tg}\,60° = -\sqrt{3}$

$\text{tg}\,(-420°) = -\sqrt{3}$

b) $\text{tg}\,420° = \text{tg}\,60° \rightarrow \text{tg}\,420° = \sqrt{3}$

c) $\text{tg}\,4\,000\pi = \text{tg}\,2\pi \rightarrow \text{tg}\,4\,000\pi = 0$

d) $\text{tg}\,7\,001\pi = \text{tg}\,\pi \rightarrow \text{tg}\,7\,001\pi = 0$

e) $\text{tg}\,\frac{15\pi}{6} = \text{tg}\,\frac{5\pi}{2} = \text{tg}\,\frac{\pi}{2}$ (não existe)

53 Dê o sinal dos números:

a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{6}$ positivo

b) $\text{tg}\,\frac{\pi}{3}$ positivo

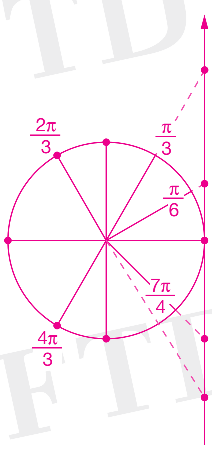
c) $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3}$ negativo

d) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3}$ positivo

e) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4}$ negativo

Resolução:

Observe, no ciclo, os valores das tangentes dos referidos arcos:



Então:

a) $\text{tg}\,\frac{\pi}{6} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

b) $\text{tg}\,\frac{\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

c) $\text{tg}\,\frac{2\pi}{3} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

d) $\text{tg}\,\frac{4\pi}{3} > 0 \rightarrow$ sinal positivo

e) $\text{tg}\,\frac{7\pi}{4} < 0 \rightarrow$ sinal negativo

54 Qual é o domínio da função $y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$? $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$y = \text{tg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right)$

$3x + \frac{\pi}{3} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} + k\pi \rightarrow 3x \neq \frac{\pi}{6} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{18} + \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

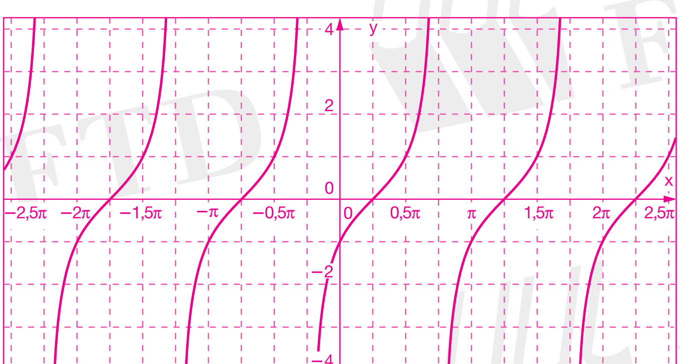
55 Esboce o gráfico e dê o domínio, a imagem e o período da função $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.

Resolução:

Fazendo uma tabela com os valores principais da primeira determinação positiva, temos:

$x - \frac{\pi}{4}$	x	$\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$
0	$\frac{\pi}{4}$	0
$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	não existe
π	$\frac{5\pi}{4}$	0
$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	não existe
2π	$\frac{9\pi}{4}$	0

Esboçando o gráfico da função, temos:



$x - \frac{\pi}{4} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi$

$D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{3\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

$\text{Im}(f) = \mathbb{R}$

$p = \frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4} = \pi$

56 Se $\text{tg } x = \frac{m + 5}{m - 3}$, para que valores de *m* existe essa função? $m \neq 3$

Resolução:

A única restrição para *m*, neste caso, é que o denominador seja diferente de zero; portanto, $m \neq 3$.

57 Determine $A = \text{sen }(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \text{tg }(\pi - x) \cdot \text{tg }(\pi + x)$, para $x = \frac{\pi}{4}$. $-\frac{3}{2}$

Resolução:

$A = \text{sen }(\pi - x) \cdot \cos(\pi + x) + \text{tg }(\pi - x) \cdot \text{tg }(\pi + x)$; $x = \frac{\pi}{4}$

$\text{sen }(\pi - x) = \text{sen } x$

$\cos(\pi + x) = -\cos x$

$\text{tg }(\pi - x) = -\text{tg } x$

$\text{tg }(\pi + x) = \text{tg } x$

Então:

$$A = \text{sen }\frac{\pi}{4} \cdot \left(-\cos \frac{\pi}{4}\right) + \left(-\text{tg }\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(\text{tg }\frac{\pi}{4}\right)$$

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + (-1) \cdot (1) \rightarrow A = -\frac{1}{2} - 1 \rightarrow A = -\frac{3}{2}$$

58 Resolva as expressões:

a) $A = 3 \text{ tg }\frac{\pi}{4} + \text{tg } 2\pi$ 3

b) $B = \text{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \text{tg}^2 \frac{2\pi}{3}$ $\frac{10}{3}$

Resolução:

a) $\text{tg }\frac{\pi}{4} = 1$

$$A = 3 \text{ tg }\frac{\pi}{4} + \text{tg } 2\pi \rightarrow A = 3 \cdot 1 + 0 \rightarrow A = 3$$

b) $\text{tg }\frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{3}$; $\text{tg }\frac{2\pi}{3} = -\sqrt{3}$

$$B = \text{tg}^2 \frac{5\pi}{6} + \text{tg}^2 \frac{2\pi}{3} \rightarrow B = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 \rightarrow B = \frac{3}{9} + 3 \rightarrow B = \frac{10}{3}$$

59 Se f(x) = tg x, para que valores de x, $x \in [0, 2\pi]$, temos f(x) = 1? $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{5\pi}{4}$

Resolução:

Para $x \in [0, 2\pi]$, tg x = 1; para $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

60 Qual o período da função real $y = \text{tg}\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$? $\frac{\pi}{2}$

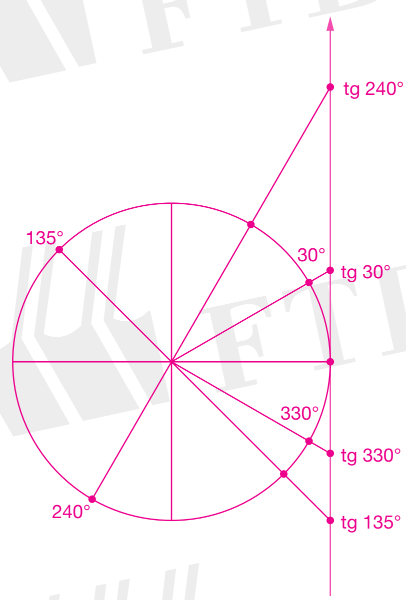
Resolução:
A função tg tem período π, então:

$2x + \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4}$ e $2x + \frac{\pi}{2} = \pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$

$p = \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{4}\right) \rightarrow p = \frac{\pi}{2}$

61 Localize os arcos no ciclo trigonométrico e coloque-os em ordem crescente: tg 30°, tg 135°, tg 240° e tg 330°. tg 135° < tg 330° < tg 30° < tg 240°

Resolução:
Com os dados, temos:



Então, tg 135° < tg 330° < tg 30° < tg 240°.

62 Resolva as equações no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

a) $\text{sen } x = 1$ $S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos x = 0$

$S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\text{tg } x = 1$ $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

$S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $\text{tg } x = 0$ $S = \{0, \pi\}$

Resolução:

a) $\text{sen } x = 1$

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$

b) $\cos x = 0$

$\cos x = \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{2}$ ou

$\cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \cos \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$

c) $\text{tg } x = 1$

$\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou

$\text{tg } x = \left(\text{tg } \frac{\pi}{4} + \pi\right) \rightarrow x = \frac{5\pi}{4} \rightarrow S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right\}$

d) $\text{sen } x = -\frac{1}{2}$

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{7\pi}{6} \rightarrow x = \frac{7\pi}{6}$ ou

$\text{sen } x = \text{sen}\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{11\pi}{6} \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} \rightarrow S = \left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

e) $\text{tg } x = 0$

$\text{tg } x = \text{tg } 0 \rightarrow x = 0$ ou

$\text{tg } x = \text{tg } \pi \rightarrow x = \pi \rightarrow S = \{0, \pi\}$

63 Resolva as equações reais.

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

c) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $\quad S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

d) $\operatorname{sen} x = -4$ $\quad S = \{\ \}$

e) $\cos x = 3$ $\quad S = \{\ \}$

Resolução:

a) $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$$\cos x = \cos \frac{3\pi}{4} \rightarrow x = \pm\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \begin{cases} x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi = +2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{2\pi}{3} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

c) $\operatorname{sen} x = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{4\pi}{3} \begin{cases} x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = \pi - \dfrac{4\pi}{3} = -\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

d) $\operatorname{sen} x = -4$; não existe x tal que $\operatorname{sen} x = -4$, pois $-1 \leqslant \operatorname{sen} x \leqslant 1$.
$S = \{\ \}$

e) $\cos x = 3$; não existe x tal que $\cos x = 3$, pois $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$.
$S = \{\ \}$

64 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = -1$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\frac{2}{\sqrt{3}} \cos x = -1 \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

$\therefore\ x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

65 Determine o conjunto verdade da equação $2 \operatorname{sen}^2 x = 1$, para $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Resolução:

$2 \operatorname{sen}^2 x = 1;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Se $\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{3\pi}{4}$

Se $\operatorname{sen} x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{5\pi}{4} \rightarrow x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$

$\therefore\ S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

66 Determine a soma das raízes da equação $\operatorname{tg}^2 x = 3$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. 4π

Resolução:

$\operatorname{tg}^2 x = 3;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$\operatorname{tg}^2 x = 3 \rightarrow \operatorname{tg} x = \pm\sqrt{3}$

Se $\operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Se $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{2\pi}{3} \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$

soma $= \frac{\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 4\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

67 Resolva a equação $2 \operatorname{sen} 2x = -1$ no conjunto dos números reais.

Resolução:

$2 \operatorname{sen} 2x = -1$

$\operatorname{sen} 2x = -\frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{7\pi}{6} \rightarrow 2x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{7\pi}{12} + k\pi$ ou

$2x = \frac{11\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{11\pi}{6} + k\pi$

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{7\pi}{12} + k\pi \text{ ou } x = \frac{11\pi}{12} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

68 Resolva a equação $2 \cos 2x = 1$, no intervalo $0 \leqslant x \leqslant \pi$. $S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$2 \cos 2x = 1;\ 0 \leqslant x \leqslant \pi$

$\cos 2x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{3}$

$2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x' = \frac{\pi}{6} + k\pi$

$2x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow 2x = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right\}$

69 Resolva a equação cos 4x = cos 2x, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$\cos 4x = \cos 2x;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$4x = \pm 2x + 2k\pi$

$$4x = 2x + 2k\pi \rightarrow 2x = 2k\pi \rightarrow x' = k\pi \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \pi \\ k = 2 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$$4x = -2x + 2k\pi \rightarrow 6x = 2k\pi \rightarrow x'' = \frac{k\pi}{3} \begin{cases} k = 0 \rightarrow x = 0 \\ k = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \\ k = 2 \rightarrow x = \frac{2\pi}{3} \\ k = 3 \rightarrow x = \pi \\ k = 4 \rightarrow x = \frac{4\pi}{3} \\ k = 5 \rightarrow x = \frac{5\pi}{3} \\ k = 6 \rightarrow x = 2\pi \text{ (não convém)} \end{cases}$$

$\therefore S = \left\{0, \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

70 Resolva a equação trigonométrica $(4\,\text{sen}^2\,x - 2) \cdot (2\cos x - 1) = 0$, no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$.

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

Resolução:

$\cos 4x = \cos 2x;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$(4\,\text{sen}^2\,x - 2) \cdot (2\cos x - 1) = 0$, temos: $4\,\text{sen}^2\,x - 2 = 0$ ou $2\cos x - 1 = 0$.

Se $4\,\text{sen}^2\,x - 2 = 0 \rightarrow \text{sen}^2\,x = \frac{1}{2}$, e $\text{sen}\,x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}; x = \frac{3\pi}{4}; x = \frac{5\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{4}$.

Se $2\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}; x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{5\pi}{3}$.

$\therefore S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{5\pi}{3}, \frac{7\pi}{4}\right\}$

71 Resolva a equação $\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x - \cos x + 1 = 0$ em $\mathbb{R}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

$\operatorname{sen} x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x - \cos x + 1 = 0$

$\operatorname{sen} x \cdot (\cos x - 1) - (\cos x - 1) = 0$

$(\operatorname{sen} x - 1) \cdot (\cos x - 1) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x - 1 = 0$ ou $\cos x - 1 = 0$

Se $\operatorname{sen} x - 1 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Se $\cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = 1 \rightarrow x = 2k\pi$

$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

72 Determine $x \in \mathbb{R}$ tal que $2 \operatorname{sen}^3 x - 7 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 0$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

$2 \operatorname{sen}^3 x - 7 \operatorname{sen}^2 x + 3 \operatorname{sen} x = 0$

$$\operatorname{sen} x \cdot (2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3) = 0 \begin{cases} \operatorname{sen} x = 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ou} \\ 2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0 \end{cases}$$

Se $\operatorname{sen} x = 0 \rightarrow x = k\pi$

Se $2 \operatorname{sen}^2 x - 7 \operatorname{sen} x + 3 = 0 \rightarrow \operatorname{sen} x = \dfrac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$ $\begin{cases} \operatorname{sen} x = 3 \text{ (não convém)} \\ \qquad \text{ou} \\ \operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \end{cases}$

$\operatorname{sen} x = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{6} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ou $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = k\pi \text{ ou } x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

73 Calcule a soma das raízes da equação $\left(tg^2\,x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\,x - 1) = 0$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $\frac{9\pi}{2}$

Resolução:

$\left(tg^2\,x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\,x - 1) = 0;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$\left(tg^2\,x - \frac{1}{3}\right) \cdot (sen\,x - 1) = 0 \rightarrow tg^2\,x - \frac{1}{3} = 0$ ou $sen\,x - 1 = 0$

Se $tg^2\,x - \frac{1}{3} = 0 \rightarrow tg\,x = \pm\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi$ ou $x = \frac{5\pi}{6} + k\pi$

Se $sen\,x - 1 = 0 \rightarrow sen\,x = 1 \rightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

Então, as raízes são: $\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$ ou $\frac{\pi}{2}$.

soma $= \frac{\pi}{6} + \frac{7\pi}{6} + \frac{5\pi}{6} + \frac{11\pi}{6} + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$

74 Resolva o sistema $\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases}$. $\left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

Resolução:

$$\begin{cases} \cos(x + y) = -1 \rightarrow \cos(x + y) = \cos\pi \rightarrow x + y = \pi \\ x - y = \frac{\pi}{2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x + \cancel{y} = \pi \\ x - \cancel{y} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$2x = \frac{3\pi}{2} \rightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Substituindo x, temos:

$\frac{3\pi}{4} + y = \pi \rightarrow y = -\frac{3\pi}{4} + \pi \rightarrow y = \frac{\pi}{4}$

$\therefore S = \left\{\left(\frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)\right\}$

75 (Unesp-SP) Uma equipe de mergulhadores, dentre eles um estudante de Ciências Exatas, observou o fenômeno das marés em determinado ponto da costa brasileira e concluiu que era periódico e podia ser aproximado pela expressão:

$$P(t) = \frac{21}{2} + 2\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right),$$

em que *t* é o tempo (em horas) decorrido após o início da observação $(t - 0)$ e $P(t)$ é a profundidade da água (em metros) no instante *t*.

Resolva a equação $\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$, para $t > 0$. $S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k, k \in \mathbb{N}\right\}$

Resolução:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = 1;\ t > 0$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4}\right) = \cos 2\pi \to \frac{\pi}{6}t + \frac{5\pi}{4} = 2\pi + 2k\pi$$

$$\frac{t}{6} + \frac{5}{4} = 2 + 2k \to \frac{2t + 15}{12} = \frac{12 \cdot (2 + 2k)}{12} \to 2t = 24 + 24k - 15 \to$$

$$\to t = \frac{9 + 24k}{2} \to t = \frac{9}{2} + 12k$$

$$S = \left\{t \in \mathbb{R} \mid t = \frac{9}{2} + 12k, k \in \mathbb{N}\right\}$$

p. 37

76 Calcule cotg x, sec x e cossec x para:

a) $x = \frac{\pi}{4}$ $1, \sqrt{2}, \sqrt{2}$

b) $x = 150°$ $-\sqrt{3}, -\frac{2\sqrt{3}}{3}, 2$

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{4}$

$$\text{cotg } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{1} \to \text{cotg } x = 1$$

$$\sec \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \to \sec x = \sqrt{2}$$

$$\text{cossec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \to \text{cossec } x = \sqrt{2}$$

b) $x = 150°$

$$\text{cotg } 150° = \frac{1}{\text{tg } 150°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{3}} \to \text{cotg } 150° = -\sqrt{3}$$

$$\sec 150° = \frac{1}{\cos 150°} = \frac{1}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} \to \sec 150° = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{cossec } 150° = \frac{1}{\text{sen } 150°} = \frac{1}{\frac{1}{2}} \to \text{cossec } 150° = 2$$

77 Seja $x = \frac{\pi}{6}$. Determine os valores de:

a) $\text{sen } x$ $\frac{1}{2}$

b) $\cos x$ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } x$ $\frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cotg } x$ $\sqrt{3}$

e) $\sec x$ $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cossec } x$ 2

Resolução:

a) $x = \frac{\pi}{6}$

$\text{sen } \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2}$

b) $\cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $\text{tg } \frac{\pi}{6} = \dfrac{\text{sen } \frac{\pi}{6}}{\cos \frac{\pi}{6}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \text{tg } x = \frac{\sqrt{3}}{3}$

d) $\text{cotg } \frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\text{tg } \frac{\pi}{6}} \rightarrow \text{cotg } x = \sqrt{3}$

e) $\sec \frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\cos \frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \rightarrow \sec x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

f) $\text{cossec } \frac{\pi}{6} = \dfrac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{6}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} \rightarrow \text{cossec } x = 2$

78 Determine o domínio da função real: $y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$. $D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$y = \text{cotg}\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$

$2x - \frac{\pi}{4} \neq k\pi \rightarrow 2x \neq \frac{\pi}{4} + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore D(f) = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{\pi}{8} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

79 Para que valores de *x* existe a função $y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$?

Resolução:

$y = \sec\left(3x - \frac{\pi}{2}\right)$

$3x - \frac{\pi}{2} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \rightarrow 3x \neq \pi + k\pi \rightarrow x \neq \frac{\pi}{3}(1 + k),\ k \in \mathbb{Z}$

A função existe para $x \neq \frac{\pi(1 + k)}{3},\ k \in \mathbb{Z}$.

80 Determine m para que a função $y = \text{cotg}\left(mx + \frac{\pi}{4}\right)$ tenha período $\frac{\pi}{2}$. $m = 2$

Resolução:

$$mx + \frac{\pi}{4} = 0 \rightarrow x = -\frac{\pi}{4m}$$

$$mx + \frac{\pi}{4} = \pi \rightarrow x = \frac{3\pi}{4m}$$

$$p = \frac{3\pi}{4m} - \left(-\frac{\pi}{4m}\right) = \frac{\pi}{2} \rightarrow m = 2$$

81 Determine m para que a função $y = \sec\left(mx - \frac{\pi}{2}\right)$ tenha período $\frac{2\pi}{3}$. $m = 3$

Resolução:

$$mx - \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{\pi}{2m}$$

$$mx - \frac{\pi}{2} = 2\pi \rightarrow x = \frac{5\pi}{2m}$$

$$p = \frac{5\pi}{2m} - \frac{\pi}{2m} = \frac{2\pi}{3} \rightarrow m = 3$$

82 Calcule m de modo que $\text{cossec}\ \alpha = 2m + 7$ e $\alpha \in \left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$. $m \leqslant -4$

Resolução:

Entre π e $\frac{3\pi}{2}$, a cossecante é menor ou igual a -1, então:

$$2m + 7 \leqslant -1 \rightarrow m \leqslant -4$$

83 Qual o sinal de f(x) = sen x · (−sec x) no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$? positivo

Resolução:

$f(x) = \text{sen } x \cdot (-\text{sec } x); \frac{3\pi}{2}, 2\pi$

$f(x) = \text{sen } x \cdot \left(-\frac{1}{\cos x}\right) = -\text{tg } x$

A função tangente no intervalo $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ é negativa; então, f(x) é positiva.

84 Determine o sinal do produto: $A = \text{tg } 122° \cdot \text{sec } 213° \cdot \text{cossec}^2\ 317°$. positivo

Resolução:

$\text{tg } 122° < 0$

$\text{sec } 213° = \frac{1}{\cos 213°} < 0$

$\text{cossec}^2\ 317° > 0$

$A = \text{tg } 122° \cdot \text{sec } 213° \cdot \text{cossec}^2\ 317° > 0$

Então, o sinal do produto é positivo.

85 Resolva a expressão: $A = 5 \text{ cossec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \text{cotg } \frac{21\pi}{4} - 4 \text{ sec } 10\pi \cdot \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3}$. $\frac{26}{3}$

Resolução:

$A = 5 \text{ cossec}^2 \frac{17\pi}{4} \cdot \text{cotg } \frac{21\pi}{4} - 4 \text{ sec } 10\pi \cdot \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3}$

$\text{cossec } \frac{17\pi}{4} = \text{cossec } \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\text{sen } \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2} \rightarrow \text{cossec}^2 \frac{17\pi}{4} = 2$

$\text{cotg } \frac{21\pi}{4} = \text{cotg } \frac{\pi}{4} = 1$

$\text{sec } 10\pi = \text{sec } 2\pi = \frac{1}{\cos 2\pi} = 1$

$\text{cotg } \frac{2\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \text{cotg}^2 \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{3}$

$A = 5 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{3} = 10 - \frac{4}{3} \rightarrow A = \frac{26}{3}$

$S = \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

86 Considere a função $f(x) = x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \alpha$. Resolva a equação $f(x) = 0$, para $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

Resolução:

$f(x) = x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \alpha$

$x^3 - x \operatorname{cossec}^2 \frac{\pi}{3} = 0$

$x\left(x^2 - \operatorname{cossec}^2 \frac{\pi}{3}\right) = 0 \rightarrow x = 0$ ou $x^2 - \frac{4}{3} = 0 \rightarrow x = \pm\frac{2\sqrt{3}}{3}$

$S = \left\{-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right\}$

87 Resolva a equação em $\mathbb{R}$: $\operatorname{cotg} x = \frac{\sqrt{3}}{3}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \sqrt{3} \rightarrow \operatorname{tg} x = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

88 Resolva a equação $\operatorname{cossec} x = \frac{1}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \{\ \}$

Resolução:

$\operatorname{cossec} x = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{\operatorname{sen} x} = \frac{1}{2} \rightarrow \operatorname{sen} x = 2$ (não existe *x* que satisfaça essa condição)

$S = \{\ \}$

89 Resolva a equação $\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\sec^2 x + \frac{2\sqrt{3}}{3} \sec x = 0$

$\sec x \left(\sec x + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = 0 \rightarrow \sec x = 0$ (não existe) ou

$\sec x = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \frac{1}{\cos x} = -\frac{2\sqrt{3}}{3} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{5\pi}{6} \rightarrow x = \pm \frac{5\pi}{6}$

$x = \frac{5\pi}{6}$ ou $x = \frac{7\pi}{6}$

$\therefore S = \left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

p. 40

90 Se $\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{6}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine as demais funções trigonométricas.
$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}$, $\text{tg } x = -\frac{\sqrt{11}}{11}$, $\text{cotg } x = -\sqrt{11}$, $\sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}$, $\text{cossec } x = 2\sqrt{3}$

Resolução:

$\text{sen } x = \frac{\sqrt{3}}{6} \rightarrow$ *x* pertence ao segundo quadrante.

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{3}{36} = \frac{33}{36} \rightarrow$ no segundo quadrante, cos *x* é negativo.

$\cos x = -\frac{\sqrt{33}}{\sqrt{36}} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{33}}{6}$

$\text{tg } x = \frac{\text{sen } x}{\cos x} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{6}}{-\frac{\sqrt{33}}{6}} \rightarrow \text{tg } x = -\frac{\sqrt{11}}{11}$

$\text{cotg } x = \frac{1}{\text{tg } x} \rightarrow \text{cotg } x = -\sqrt{11}$

$\sec x = \frac{1}{\cos x} = -\frac{6}{\sqrt{33}} \rightarrow \sec x = -\frac{2\sqrt{33}}{11}$

$\text{cossec } x = \frac{1}{\text{sen } x} = \frac{6}{\sqrt{3}} \rightarrow \text{cossec } x = 2\sqrt{3}$

91 Sabendo que $\text{sen } x + \cos x = \frac{1}{5}$, determine $A = \text{sen } x \cdot \cos x$. $A = -\frac{12}{25}$

Resolução:

$\text{sen } x + \cos x = \frac{1}{5} \rightarrow$ elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$(\text{sen } x + \cos x)^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow$$

$$\rightarrow 1 + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{25} \rightarrow 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \frac{1}{25} - 1 = -\frac{24}{25}$$

$$A = \text{sen } x \cdot \cos x = -\frac{12}{25}$$

$$\therefore A = -\frac{12}{25}$$

92 Se $\text{tg } x = 4$, determine $y = \frac{1}{\cos^2 x}$. $y = 17$

Resolução:

$$y = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x + 1$$

Como $\text{tg } x = 4$, $\text{tg}^2 x = 16$. Então:

$\text{tg}^2 x + 1 = 16 + 1 = 17$

$\therefore y = 17$

93 Determine o valor da expressão: $A = (\text{sen } x - \cos x)^2 + (\text{sen } x + \cos x)^2$. $A = 2$

Resolução:

$A = (\text{sen } x - \cos x)^2 + (\text{sen } x + \cos x)^2$

$A = \text{sen}^2 x + \cancel{2 \text{ sen } x \cdot \cos x} + \cos^2 x + \text{sen}^2 x - \cancel{2 \text{ sen } x \cdot \cos x} + \cos^2 x$

Como $\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$, temos: $A = 2$.

94 Determine o valor numérico da expressão $y = \dfrac{\text{tg } x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x}$ para $\text{cotg } x = -\dfrac{7}{24}$ e $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$. $y = \dfrac{25}{24}$

Resolução:

$$y = \frac{\text{tg } x \cdot \cos x}{1 - \cos^2 x} = \text{tg } x \cdot \frac{\cos x}{\text{sen } x \cdot \text{sen } x} = \text{tg } x \cdot \text{cotg } x \cdot \text{cossec } x = \cancel{\text{tg } x} \cdot \frac{1}{\cancel{\text{tg } x}} \cdot \text{cossec } x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \text{cotg}^2 x$$

$$\text{cossec}^2 x = 1 + \left(-\frac{7}{24}\right)^2 = 1 + \frac{49}{576} = \frac{625}{576}$$

$\text{cossec } x = \pm\dfrac{25}{24} \rightarrow$ no terceiro quadrante, a cossecante é positiva; logo, $y = \dfrac{25}{24}$.

95 Dado $\sec x = 8$, determine o valor da expressão $y = 2 + \text{sen } x \cdot \text{tg } x + \cos x$. $y = 10$

Resolução:

$$y = 2 + \text{sen } x \cdot \text{tg } x + \cos x$$

$$y = 2 + \text{sen } x \cdot \frac{\text{sen } x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\text{sen}^2 x}{\cos x} + \cos x = 2 + \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$$

$$y = 2 + \frac{1}{\cos x} = 2 + \sec x = 2 + 8 \rightarrow y = 10$$

96 (Fuvest-SP) A soma das raízes da equação $\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$ que estão no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) 2π
b) 3π
c) 4π
d) 6π
e) 7π

Resolução:

$\text{sen}^2 x - 2\cos^4 x = 0$

$1 - \cos^2 x - 2\cos^4 x = 0$

Fazendo $\cos^2 x = y$, temos: $2y^2 + y - 1 = 0$.

$$y = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 8}}{4} \begin{cases} y = \dfrac{1}{2} \\ \text{ou} \\ y = -1 \end{cases}$$

Se $\cos^2 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \cos x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{4}, x = \dfrac{3\pi}{4}, x = \dfrac{5\pi}{4}$ ou $x = \dfrac{7\pi}{4}$

Se $\cos^2 x = -1 \rightarrow$ não existe x

$\text{soma} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{3\pi}{4} + \dfrac{5\pi}{4} + \dfrac{7\pi}{4} = 4\pi$

97 Resolva a equação $\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$ no intervalo $[\pi, 2\pi[$. $S = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\cos^2 x - \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2}$

$1 - \text{sen}^2 x - \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{2} \rightarrow \text{sen}^2 x = \dfrac{1}{4} \rightarrow \text{sen}\, x = \pm\dfrac{1}{2}$

Se $\text{sen}\, x = \dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{5\pi}{6}$; então, não pertencem ao intervalo $[\pi, 2\pi[$.

Se $\text{sen}\, x = -\dfrac{1}{2} \rightarrow x = \dfrac{7\pi}{6}$ ou $x = \dfrac{11\pi}{6}$; então, pertencem ao intervalo $[\pi, 2\pi[$.

Logo, $S = \left\{\dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$.

98 (Unemat-MT) Na expressão $\dfrac{\sec^2 x \cdot \cos x - \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec}^2 x \cdot \operatorname{sen} x - \sec x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x}$, podemos afirmar:

V 1. O numerador é igual a $\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x$.

V 2. O denominador é igual a $\cos x \cdot \operatorname{cotg} x$.

F 3. Podemos dizer que $\dfrac{\sec^2 x \cdot \cos x - \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec}^2 x \cdot \operatorname{sen} x - \sec x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x} = \operatorname{tg} x$.

F 4. Se considerarmos $\sec x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x$ isoladamente, então poderemos substituí-la por sen x.

F 5. O numerador é igual ao denominador, portanto a expressão é igual a 1 (um).

Resolução:

$$\frac{\sec^2 x \cdot \cos x - \operatorname{cotg} x \cdot \operatorname{sen} x}{\operatorname{cossec}^2 x \cdot \operatorname{sen} x - \sec x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} \cdot \cos x - \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \operatorname{sen} x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen}^2 x} \cdot \operatorname{sen} x - \dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x} =$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\cos x} - \cos x}{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\operatorname{cotg} x \cdot \cos x} = \frac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x \cdot \cos x}$$

1. (Verdadeira)
2. (Verdadeira)
3. (Falsa); $\dfrac{\operatorname{sen} x \cdot \operatorname{tg} x}{\operatorname{cotg} x \cdot \cos x} = \dfrac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \dfrac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^3 x} = \operatorname{tg}^3 x$
4. (Falsa); $\sec x \cdot \operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} x \cdot \cos x = \operatorname{cotg} x \left(\dfrac{1}{\cos x} + \cos x\right) = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\left(\dfrac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\cos x}\right) = \dfrac{1 + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}$
5. (Falsa)

99 Para que valores de *m* $\operatorname{sen} x = \sqrt{m^2 + 2m + 1}$ e $\cos x = 1$? $m = -1$

Resolução:

Se $\cos x = 1$, $\operatorname{sen} x = 0$; então, $\sqrt{m^2 + 2m + 1} = 0 \rightarrow m^2 + 2m + 1 = 0 \rightarrow (m + 1)^2 = 0 \rightarrow m = -1$

100 (Fuvest-SP) Se α está no intervalo $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e satisfaz $\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$, então o valor da tangente de α é:

a) $\sqrt{\frac{3}{5}}$

b) $\sqrt{\frac{5}{3}}$

c) $\sqrt{\frac{3}{7}}$

d) $\sqrt{\frac{7}{3}}$

e) $\sqrt{\frac{5}{7}}$

Resolução:

$\text{sen}^4 \alpha - \cos^4 \alpha = \frac{1}{4}$

$(\text{sen}^2 \alpha + \cos^2 \alpha) \cdot (\text{sen}^2 \alpha - \cos^2 \alpha) = \frac{1}{4}$

$1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow 1 - 2\cos^2 \alpha = \frac{1}{4} \rightarrow \cos^2 \alpha = \frac{3}{8} \rightarrow \cos \alpha = \frac{\sqrt{6}}{4} \rightarrow$

cosseno positivo, pois pertence ao primeiro quadrante.

$\text{sen}^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha$

$1 - \frac{6}{16} \rightarrow \text{sen}\, \alpha = \frac{\sqrt{10}}{4} \rightarrow$ seno também positivo.

$\text{tg}\, \alpha = \frac{\sqrt{10}}{\sqrt{6}} = \sqrt{\frac{5}{3}}$

101 (UFAM) Associe as expressões equivalentes das duas colunas e assinale a alternativa correspondente à associação correta.

(A) $\frac{1}{\cos^2 x}$

(B) $\sec x$

(C) $\sec^2 x - 1$

(D) $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x$

(1) $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x}$

(2) $\text{tg}^2 x + 1$

(3) 1

(4) $\text{tg}^2 x$

a) A2, B1, C3, D4

b) A3, B1, C4, D2

c) A2, B3, C4, D1

d) A2, B1, C4, D3

e) A2, B4, C1, D3

Resolução:

(1) $\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x} = \frac{1}{\cos x} = \sec x \rightarrow$ (B)

(2) $\text{tg}^2 x + 1 = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} + 1 = \frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow$ (A)

(3) $\text{cossec}^2 x - \text{cotg}^2 x = \frac{1}{\text{sen}^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\text{sen}^2 x} = 1 \rightarrow$ (D)

(4) $\sec^2 x - 1 = \frac{1}{\cos^2 x} - 1 = \frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \text{tg}^2 x \rightarrow$ (C)

102 Se $\cos x = \frac{4}{5}$ e $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$, determine:

a) $\text{sen } x$ $\frac{3}{5}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ $\frac{3}{5}$

c) $\text{tg}\,(2\pi - x)$ $-\frac{3}{4}$

d) $\sec(\pi + x)$ $-\frac{5}{4}$

Resolução:

$\cos x = \frac{4}{5}$; $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$

a) $\text{sen } x = \sqrt{1 - \cos^2 x} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \frac{3}{5}$

b) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x = \frac{3}{5}$

c) $\text{tg}\,(2\pi - x) = -\text{tg } x = -\frac{\text{sen } x}{\cos x} = -\frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

d) $\sec(\pi + x) = \frac{1}{\cos(\pi + x)} = \frac{1}{-\cos x} = -\frac{5}{4}$

103 Se $x + y = \frac{\pi}{2}$ e $\text{sen } x = \frac{1}{3}$, o valor de cos y é:

a) 0

b) 1

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Resolução:

$x + y = \frac{\pi}{2}$; $\text{sen } x = \frac{1}{3}$

$y = \frac{\pi}{2} - x \rightarrow \cos y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \text{sen } x = \frac{1}{3}$

104 Determine, em função de sen x, cos x e tg x:

a) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $-\frac{1}{\text{tg } x}$

b) $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $-\text{tg } x$

c) $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $-\frac{1}{\text{sen } x}$

d) $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$ $\frac{1}{\cos x}$

Resolução:

a) $\text{tg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{tg}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \text{cotg}\,(-x) = -\text{cotg } x = -\frac{1}{\text{tg } x}$

b) $\text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \text{tg}\,(-x) = -\text{tg } x$

c) $\sec\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sec\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \text{cossec}\,(-x) = \frac{1}{\text{sen}\,(-x)} = -\frac{1}{\text{sen } x}$

d) $\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right) = \sec(-x) = \frac{1}{\cos(-x)} = \frac{1}{\cos x}$

105 (UFOP-MG) A expressão $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$ é equivalente a:

a) tg x
b) cotg x
c) $-$tg x
d) $-$cotg x
e) 1

Resolução:

$$\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)}{\cos x} = \frac{\text{sen}\,(-x)}{\cos x} = \frac{-\text{sen}\,x}{\cos x} = -\text{tg}\,x$$

106 Se $\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ e $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$, determine:

a) $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right)$ $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

$\cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}$

a) $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = -\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\,x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

107 Se $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{3}$ e $\pi \leqslant x \leqslant \dfrac{3\pi}{2}$, determine o valor numérico de:

$$A = \frac{\text{sen}\,(\pi - x) + \text{sen}\,(\pi + x) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sec\,(2\pi - x)}. \quad \frac{8}{9}$$

Resolução:

$$A = \frac{\text{sen}\,(\pi - x) + \text{sen}\,(\pi + x) + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{\sec\,(2\pi - x)}$$

$$A = \frac{\text{sen}\,x + (-\text{sen}\,x) + \cos x}{\frac{1}{\cos\,(2\pi - x)}} = \frac{\cos x}{\frac{1}{\cos x}} = \cos^2 x = 1 - \text{sen}^2\,x$$

Substituindo $\text{sen}\,x = -\dfrac{1}{3}$, temos: $A = 1 - \dfrac{1}{9} \rightarrow A = \dfrac{8}{9}$.

108 Simplifique a expressão $A = \dfrac{\text{tg}\,(\pi + x)}{\text{cossec}\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sec\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)} + \cos^2 x$. 1

Resolução:

$$A = \frac{\text{tg}\,(\pi + x)}{\text{cossec}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right)} + \cos^2 x$$

$$A = \frac{\text{tg}\,x}{\sec x \cdot \text{cossec}\,x} + \cos^2 x = \frac{\text{sen}\,x}{\cos x} \cdot \cos x \cdot \text{sen}\,x + \cos^2 x \rightarrow A = 1$$

109 Simplificando a expressão $A = \dfrac{14\,\text{sen}\,(\pi - x) - 4\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)}{5\,\text{sen}\,(2\pi - x)}$, obtemos:

a) 0
b) 1
c) −1
d) 2
e) −2

Resolução:

$$A = \frac{14\,\text{sen}\,(\pi - x) - 4\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}{5\,\text{sen}\,(2\pi - x)} = \frac{14\,\text{sen}\,x - 4\,\text{sen}\,x}{5\,(-\text{sen}\,x)} = \frac{10\,\text{sen}\,x}{-5\,\text{sen}\,x} \rightarrow A = -2$$

110 Resolva a equação $\text{sen}\left(\dfrac{3\pi}{2} + x\right) = \cos x$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

Resolução:

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \cos x$$

$$\text{sen}\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) = \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$\frac{3\pi}{2} + x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + x = \pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2k\pi \quad (\text{não existe } x)$$

$$2x = \frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + k\pi$$

Se $k = 0 \rightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} \notin [0, 2\pi]$

Se $k = 1 \rightarrow x = \dfrac{\pi}{2}$

Se $k = 2 \rightarrow x = \dfrac{3\pi}{2}$

Se $k = 3 \rightarrow x = \dfrac{5\pi}{2} \notin [0, 2\pi]$

$\therefore S = \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$

111 Resolva a equação $\text{tg } 10x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\text{tg } 10x = \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\text{tg } 10x = \text{tg } x$

$10x = x + k\pi$

$9x = k\pi$

$x = \frac{k\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}$

$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{k\pi}{9},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

112 A soma das raízes da equação $\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos^2 x = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$ é:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

Resolução:

$\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right) - \cos^2 x = 0$

$\text{sen}^2 x - \cos^2 x = 0 \rightarrow \text{sen}^2 x - (1 - \text{sen}^2 x) = 0 \rightarrow 2\ \text{sen}^2 x = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

As raízes são: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}$ ou $\frac{7\pi}{4}$.

$\text{soma} = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{4} + \frac{5\pi}{4} + \frac{7\pi}{4} = 4\pi$

113 Resolva a equação $\text{tg}^2 x = \sqrt{3} \cdot \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$\text{tg}^2 x = \sqrt{3}\ \text{cotg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$

$\text{tg}^2 x = \sqrt{3}\ \text{tg } x \rightarrow \text{tg}^2 x - \sqrt{3}\ \text{tg } x = 0 \rightarrow \text{tg } x\left(\text{tg } x - \sqrt{3}\right) = 0 \rightarrow \text{tg } x = 0$ ou $\text{tg } x = \sqrt{3}$

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\text{tg } x = \text{tg } 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = \pi$

$\text{tg } x = \text{tg } \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}$ ou $x = \frac{4\pi}{3}$

Então, $S = \left\{0, \pi, \frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right\}$.

114 (Fuvest-SP) Se α é um ângulo tal que $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ e sen α = a, então tg ($\pi - \alpha$) é igual a:

a) $\frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}$

b) $\frac{a}{\sqrt{1 - a^2}}$

c) $\frac{\sqrt{1 - a^2}}{a}$

d) $\frac{-\sqrt{1 - a^2}}{a}$

e) $-\frac{1 + a^2}{a}$

Resolução:

$\text{sen } \alpha = a \rightarrow \text{sen } (\pi - \alpha) = a$

$\text{sen}^2 (\pi - \alpha) + \cos^2 (\pi - \alpha) = 1 \rightarrow a^2 + \cos^2 (\pi - \alpha) = 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos (\pi - \alpha) = -\sqrt{1 - a^2}$ $\rightarrow$ o cosseno no segundo quadrante é negativo.

$$\text{tg } (\pi - \alpha) = \frac{\text{sen } (\pi - a)}{\cos (\pi - a)} \rightarrow \text{tg } (\pi - \alpha) = \frac{-a}{\sqrt{1 - a^2}}$$

p. 46

115 Determine:

a) cos 75° $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) tg 165° $\sqrt{3} - 2$

c) cotg 105° $\sqrt{3} - 2$

Resolução:

a) $\cos 75° = \cos (30° + 45°) = \cos 30° \cdot \cos 45° - \text{sen } 30° \cdot \text{sen } 45° =$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

b) $\text{tg } 165° = \text{tg } (135° + 30°) = \frac{\text{tg } 135° + \text{tg } 30°}{1 - \text{tg } 135° \cdot \text{tg } 30°} =$

$$= \frac{-1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{(-1) \cdot \sqrt{3}}{3}} = \frac{-3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3}} =$$

$$= \frac{(-3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})}{(3 + \sqrt{3}) \cdot (3 - \sqrt{3})} = \frac{6\sqrt{3} - 12}{6} = \sqrt{3} - 2$$

c) $\text{cotg } 105° = \text{cotg } (60° + 45°) = \frac{1}{\text{tg } (60° + 45°)} = \frac{1 - \text{tg } 60° \cdot \text{tg } 45°}{\text{tg } 60° + \text{tg } 45°} =$

$$= \frac{(1 - \sqrt{3} \cdot 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)}{(\sqrt{3} + 1) \cdot (\sqrt{3} - 1)} = \frac{2\sqrt{3} - 4}{2} = \sqrt{3} - 2$$

116 Usando as fórmulas de adição e subtração, prove que $\cos (\pi + x) = -\cos x$ e $\text{sen } (\pi + x) = -\text{sen } x$.

Resolução:

$\cos (\pi + x) = \cos \pi \cdot \cos x - \text{sen } \pi \cdot \text{sen } x = -\cos x$

$\text{sen } (\pi + x) = \text{sen } \pi \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos \pi = -\text{sen } x$

117 Se $x - y = 30°$, determine $(\cos x + \cos y)^2 + (\text{sen } x + \text{sen } y)^2$. $2 + \sqrt{3}$

Resolução:

$x - y = 30°$

$(\cos x + \cos y)^2 + (\text{sen } x + \text{sen } y)^2 =$

$= \cos^2 x + 2 \cos x \cdot \cos y + \cos^2 y + \text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x \cdot \text{sen } y + \text{sen}^2 y =$

$= 2 + 2(\cos x \cdot \cos y + \text{sen } x \cdot \text{sen } y) = 2 + 2 \cos (x - y) =$

$= 2(1 + \cos 30°) = 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2 + \sqrt{3}$

118 (Unifesp-SP) A expressão $\text{sen } (x - y) \cdot \cos y + \cos (x - y) \cdot \text{sen } y$ é equivalente a:

a) sen (2x + y)
b) cos (2x)
c) sen x
d) sen (2x)
e) cos (2x + 2y)

Resolução:

$\text{sen } (x - y) \cdot \cos y + \cos (x - y) \cdot \text{sen } y = \text{sen } (x - \cancel{y} + \cancel{y}) = \text{sen } x$

119 Determine o valor de $\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, sabendo que $\text{sen } x = \frac{\sqrt{7}}{4}$ e $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$. $\frac{3 + \sqrt{21}}{8}$

Resolução:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$, $\text{sen } x = \frac{\sqrt{7}}{4}$; $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

$\text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{7}{16} = \frac{9}{16} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \frac{3}{4} \rightarrow$ cosseno positivo, pois $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \text{sen } x \cdot \cos \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} + \frac{\sqrt{7}}{4} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = \frac{3 + \sqrt{21}}{8}$

120 Determine o valor de $\text{sen}\,(a + b) \cdot \text{sen}\,(a - b)$ em função de sen a e sen b. $\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$

Resolução:

$\text{sen}\,(a + b) \cdot \text{sen}\,(a - b) =$

$= (\text{sen}\,a \cdot \cos b + \text{sen}\,b \cdot \cos a) \cdot (\text{sen}\,a \cdot \cos b - \text{sen}\,b \cdot \cos a) =$

$= \text{sen}^2 a \cdot \cos^2 b - \text{sen}^2 b \cdot \cos^2 a = \text{sen}^2 a\,(1 - \text{sen}^2 b) - \text{sen}^2 b\,(1 - \text{sen}^2 a) =$

$= \text{sen}^2 a - \cancel{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b} - \text{sen}^2 b + \cancel{\text{sen}^2 a \cdot \text{sen}^2 b} = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$

121 Determine o valor da expressão: $A = \text{sen}\,70° \cdot \cos 25° - \text{sen}\,25° \cdot \cos 70°$. $\frac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:

$A = \text{sen}\,70° \cdot \cos 25° - \text{sen}\,25° \cdot \cos 70° = \text{sen}\,(70° - 25°) = \text{sen}\,45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

122 Se $\text{cotg}\,a = \frac{1}{2}$ e $\text{cotg}\,b = \frac{1}{5}$, determine $\text{tg}\,(a + b)$. $-\frac{7}{9}$

Resolução:

$\text{cotg}\,a = \frac{1}{2} \rightarrow \text{tg}\,a = \frac{1}{\text{cotg}\,a} = 2$

$\text{cotg}\,b = \frac{1}{5} \rightarrow \text{tg}\,b = \frac{1}{\text{cotg}\,b} = 5$

$\text{tg}\,(a + b) = \frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a \cdot \text{tg}\,b} = \frac{2 + 5}{1 - 2 \cdot 5} = -\frac{7}{9}$

123 Resolva a equação sen x + cos x $= \sqrt{2}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

sen x + cos x $= \sqrt{2}$ $\rightarrow$ multiplicando a equação por $\frac{\sqrt{2}}{2}$, temos:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \text{sen } x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2}$$

Sabendo que $\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{4}$, temos:

$$\cos \frac{\pi}{4} \cdot \text{sen } x + \text{sen } \frac{\pi}{4} \cdot \cos x = 1$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{2} \rightarrow x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\therefore S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

124 Resolva a equação cos x $+ \sqrt{3}$ sen x = 1 no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$$\cos x + \sqrt{3}\ \text{sen } x = 1;\ 0 \leqslant x < 2\pi$$

Multiplicando a equação por $\frac{1}{2}$, temos:

$$\frac{1}{2} \cos x + \frac{\sqrt{3}}{2} \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

Sabendo que $\frac{1}{2} = \text{sen } \frac{\pi}{6}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}$, temos:

$$\text{sen } \frac{\pi}{6} \cdot \cos x + \cos \frac{\pi}{6} \cdot \text{sen } x = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \text{sen } \frac{\pi}{6} \begin{cases} x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad \text{ou} \\ x + \frac{\pi}{6} = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

$$x = 2k\pi \rightarrow x = 0$$

$$x = \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

$$S = \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

125 Resolva a equação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos 0$ no intervalo $0 \leqslant x < 2\pi$. $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$

Resolução:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cos 0;\ 0 \leqslant x < 2\pi$

$\text{sen}\ \frac{\pi}{2} \cdot \cos x - \text{sen}\ x \cdot \cos \frac{\pi}{2} = \cos \frac{3\pi}{2} \cdot \cos x + \text{sen}\ \frac{3\pi}{2} \cdot \text{sen}\ x + 1$

$\cos x - 0 = 0 - \text{sen}\ x + 1$

$\cos x + \text{sen}\ x = 1 \rightarrow$ elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$\text{sen}^2 x + 2\ \text{sen}\ x \cdot \cos x + \cos^2 x = 1 \rightarrow 2\ \text{sen}\ x \cdot \cos x = 0 \rightarrow \text{sen}\ 2x = \text{sen}\ 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2x = 0 + 2k\pi$ ou $2x = \pi + 2k\pi \rightarrow x = k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Então, $x = 0$ ou $x = \frac{\pi}{2}$.

$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}\right\}$

126 (FGV-SP) Conhecidas as relações trigonométricas $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b$ e $\text{sen}(a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$,

a) obtenha, justificando, a expressão de cos 2x em função de cos x; $2\cos^2 x - 1$

b) obtenha, justificando, a expressão da tg (a + b) em função de tg a e tg b. $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$

Resolução:

a) $\cos(a + b) = \cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b;\ \text{sen}(a + b) = \text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a$

$\cos 2x = \cos(x + x) = \cos x \cdot \cos x - \text{sen}\ x \cdot \text{sen}\ x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x =$

$= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1$

b) $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{sen}(a + b)}{\cos(a + b)} = \frac{\text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}$

Dividindo o numerador e o denominador por cos a · cos b, temos:

$$\frac{\frac{\text{sen}\ a \cdot \cos b + \text{sen}\ b \cdot \cos a}{\cos a \cdot \cos b}}{\frac{\cos a \cdot \cos b - \text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\frac{\text{sen}\ a}{\cos a} + \frac{\text{sen}\ b}{\cos b}}{1 - \frac{\text{sen}\ a \cdot \text{sen}\ b}{\cos a \cdot \cos b}} = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$$

Então, $\text{tg}(a + b) = \frac{\text{tg}\ a + \text{tg}\ b}{1 - \text{tg}\ a \cdot \text{tg}\ b}$

127 Se cossec x = 2 e $\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi$, determine sen 2x. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

Resolução:

$\text{cossec } x = 2 \quad (2^{\text{o}} \text{ quadrante})$

$\frac{1}{\text{sen } x} = 2 \rightarrow \text{sen } x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \rightarrow \cos^2 x = 1 - \frac{1}{4} \rightarrow$

$\rightarrow \cos x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (2^{\text{o}} \text{ quadrante})$

$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \rightarrow \text{sen } 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

128 Se sen x − cos x = a, determine sen 2x em função de *a*. $1 - a^2$

Resolução:

sen x − cos x = a → elevando os dois membros ao quadrado, temos:

$(\text{sen } x - \cos x)^2 = a^2 \rightarrow \text{sen}^2 x - 2 \cdot \text{sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x = a^2 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = a^2 \rightarrow -2 \text{ sen } x \cos x = a^2 - 1 \rightarrow 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = 1 - a^2$

129 Se a = 2 cos 30° · cos 60°, determine $4a^2$. 3

Resolução:

$a = 2 \cos 30° \cdot \cos 60°$

$a = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$4 \cdot a^2 = 4 \cdot \frac{3}{4} = 3$

130 (FGV-SP) No intervalo $[0, 2\pi]$, a equação trigonométrica sen 2x = sen x tem raízes cuja soma vale:

a) π
b) 2π
c) 3π
d) 4π
e) 5π

Resolução:

No intervalo $[0, 2\pi]$, temos:

$\text{sen } 2x = \text{sen } x \rightarrow 2 \text{ sen } x \cdot \cos x - \text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x\,(2 \cos x - 1) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow \text{sen } x = 0$ ou $2 \cos x - 1 = 0$

Se $\text{sen } x = 0 \rightarrow \text{sen } x = \text{sen } 0 \rightarrow x = 0, x = \pi, x = 2\pi$

Se $2 \cos x - 1 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3}, x = \frac{5\pi}{3}$

$\text{soma} = 0 + \pi + 2\pi + \frac{\pi}{3} + \frac{5\pi}{3} = 5\pi$

131 (Fuvest-SP) Determine todos os valores de *x* pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ que satisfazem a equação: $\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x$. $S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\cos^2 2x = \frac{1}{2} - \text{sen}^2 x \rightarrow (1 - 2 \text{ sen}^2 x)^2 = \frac{1 - 2 \text{ sen}^2 x}{2} \rightarrow$

$\rightarrow (1 - 2 \text{ sen}^2 x)^2 - \frac{1}{2}(1 - 2 \text{ sen}^2 x) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow (1 - 2 \text{ sen}^2 x)\left[(1 - 2 \text{ sen}^2 x) - \frac{1}{2}\right] = 0 \rightarrow (1 - 2 \text{ sen}^2 x) \cdot \left(\frac{1}{2} - 2 \text{ sen}^2 x\right) = 0 \rightarrow$

$\rightarrow 1 - 2 \text{ sen}^2 x = 0 \rightarrow 2 \text{ sen}^2 x = 1 \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow$

$\text{sen } x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow x = \frac{\pi}{4}, x = \frac{3\pi}{4}, x = \frac{5\pi}{4}, x = \frac{7\pi}{4}$

$\frac{1}{2} - 2 \text{ sen}^2 x = 0 \rightarrow 2 \text{ sen}^2 x = \frac{1}{2} \rightarrow \text{sen}^2 x = \frac{1}{4} \rightarrow \text{sen } x = \pm\frac{1}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x = \frac{\pi}{6}, x = \frac{5\pi}{6}, x = \frac{7\pi}{6}, x = \frac{11\pi}{6}$

$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$

132 (Fuvest-SP) Se tg θ = 2, então o valor de $\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta}$ é:

a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) $\frac{2}{3}$

e) $\frac{3}{4}$

Resolução:

$\operatorname{tg} \theta = 2 \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta} = 2 \rightarrow \operatorname{sen} \theta = 2 \cos \theta$

$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow (2 \cos \theta)^2 + \cos^2 \theta = 1 \rightarrow \cos^2 \theta = \frac{1}{5}$ e $\operatorname{sen}^2 \theta = \frac{4}{5}$

$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta = \frac{1}{5} - \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cdot \cos \theta = 2 \cdot 2 \cos \theta \cdot \cos \theta = 4 \cos^2 \theta = 4 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$

$$\frac{\cos 2\theta}{1 + \operatorname{sen} 2\theta} = \frac{-\frac{3}{5}}{1 + \frac{4}{5}} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{9}{5}} = -\frac{1}{3}$$

133 Resolva a equação $\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2}$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\operatorname{sen} x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \rightarrow 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x = 1 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2} \rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

134 Se sen 2x = m, determine sen 4x. $2m\sqrt{1 - m^2}$

Resolução:

$\operatorname{sen} 2x = m \rightarrow \operatorname{sen}^2 2x + \cos^2 2x = 1 \rightarrow m^2 + \cos^2 2x = 1 \rightarrow \cos 2x = \sqrt{1 - m^2}$

$\operatorname{sen} 4x = 2 \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 2x \rightarrow \operatorname{sen} 4x = 2m\sqrt{1 - m^2}$

135 Expresse sen 3α em função de sen α. $3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha$

Resolução:

$\text{sen } 3\alpha = \text{sen } (2\alpha + \alpha)$

$\text{sen } 3\alpha = \text{sen } 2\alpha \cdot \cos \alpha + \text{sen } \alpha \cdot \cos 2\alpha$

$\text{sen } 3\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \text{sen } \alpha \, (1 - 2 \text{ sen}^2 \alpha)$

$\text{sen } 3\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \cdot \cos^2 \alpha + \text{sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3 \alpha$

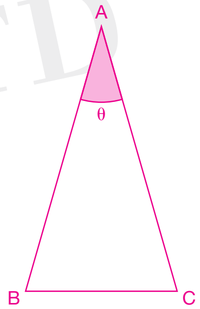
$\text{sen } 3\alpha = 2 \text{ sen } \alpha \, (1 - \text{sen}^2 \alpha) + \text{sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3 \alpha$

$\text{sen } 3\alpha = 2 \text{ sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3 \alpha + \text{sen } \alpha - 2 \text{ sen}^3 \alpha$

$\text{sen } 3\alpha = 3 \text{ sen } \alpha - 4 \text{ sen}^3 \alpha$

136 (UFAL) O ângulo do vértice de um triângulo isósceles é um ângulo agudo. Se a tangente desse ângulo é igual ao dobro do quadrado de seu seno, determine o cosseno da soma dos ângulos da base. $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Resolução:



$$\text{tg } \theta = 2 \text{ sen}^2 \theta \rightarrow \frac{\text{sen } \theta}{\cos \theta} = 2 \text{ sen}^2 \theta \rightarrow \frac{1}{\cos \theta} = 2 \text{ sen } \theta \rightarrow 2 \text{ sen } \theta \cdot \cos \theta = 1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{sen } 2\theta = 1 \rightarrow \text{sen } 2\theta = \text{sen } \frac{\pi}{2} \rightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

Se $\theta = \dfrac{\pi}{4}$, a soma dos ângulos da base é $\pi - \dfrac{\pi}{4} = \dfrac{3\pi}{4}$, ou seja, $\cos \dfrac{3\pi}{4} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

137 (ITA-SP) Sendo α e β os ângulos agudos de um triângulo retângulo, e sabendo que $\text{sen}^2 2\beta - 2 \cos 2\beta = 0$, então sen α é igual a:

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

b) $\dfrac{\sqrt[4]{2}}{2}$

c) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt[4]{8}}{4}$

e) zero

Resolução:

$\text{sen}^2 2\beta - 2 \cos 2\beta = 0$

$(2 \text{ sen } \beta \cdot \cos \beta)^2 - 2(2 \cos^2 \beta - 1) = 0$

$4 \text{ sen}^2 \beta \cdot \cos^2 \beta - 4 \cos^2 \beta + 2 = 0$

$4 \cos^2 \beta \, (\text{sen}^2 \beta - 1) + 2 = 0$

$-4 \cos^2 \beta \, (1 - \text{sen}^2 \beta) + 2 = 0$

$-4 \cos^4 \beta + 2 = 0$

$$\cos^4 \beta = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \beta = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \cdot \frac{\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^3}} = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}$$

Sendo o triângulo retângulo, $\alpha + \beta = 90°$ e $\text{sen } \alpha = \cos \beta$; então, $\text{sen } \alpha = \cos \beta = \dfrac{\sqrt[4]{8}}{2}$.

138 (Unicamp-SP) Considere a equação trigonométrica $\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta = 0$.

a) Mostre que não são soluções dessa equação os valores de θ para os quais $\cos\theta = 0$.

b) Encontre todos os valores de $\cos\theta$ que são soluções da equação. $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Resolução:

$\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2\theta = 0$

$\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \frac{1}{2}\cdot 2\,\text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta = 0$

$\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta = 0$

a) Se $\cos\theta = 0 \rightarrow \text{sen}\,\theta = \pm 1$

Substituindo na equação: $(\pm 1)^2 - 2\cdot 0 + (\pm 1)\cdot 0 = 1$. (não anula a expressão)

b) $\text{sen}^2\,\theta - 2\cos^2\theta + \text{sen}\,\theta\cdot\cos\theta = 0$

Dividindo a igualdade por $\cos^2\theta \neq 0$, temos:

$\text{tg}^2\,\theta - 2 + \text{tg}\,\theta = 0 \rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$ $\begin{cases} \text{tg}\,\theta = 1 \\ \text{tg}\,\theta = -2 \end{cases}$ ou

$\sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\,\theta \rightarrow \sec^2\theta = 1 + 1 = 2 \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

ou

$\sec^2\theta = 1 + \text{tg}^2\,\theta \rightarrow \sec^2\theta = 1 + 4 = 5 \rightarrow \cos^2\theta = \frac{1}{5} \rightarrow \cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$

Portanto, $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $\cos\theta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$.

p. 50

139 Determine:

a) sen 67° 30′ $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

b) cos 67° 30′ $\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c) tg 67° 30′ $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$

Resolução:

a) $\text{sen}\,67°\,30' = \frac{135°}{2} \rightarrow \text{sen}\,67°\,30' = \sqrt{\frac{1-\cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}} \rightarrow \text{sen}\,67°\,30' = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

b) $\cos 67°\,30' = \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2}} \rightarrow \cos 67°\,30' = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

c) $\text{tg}\,67°\,30' = \sqrt{\frac{1+\cos 135°}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2+\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}{(2-\sqrt{2})\cdot(2+\sqrt{2})}} \rightarrow \text{tg}\,67°\,30' = \sqrt{3+2\sqrt{2}}$

140 Se $\text{sen } x = \dfrac{4}{5}$, determine $A = \dfrac{5}{3} \cdot \cos x + \sqrt{5} \cdot \text{sen } \dfrac{x}{2}$ para $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$. $A = 2$

Resolução:

x é arco do primeiro quadrante.

$$\text{sen } x = \frac{4}{5} \to \cos x = \frac{\sqrt{1 - 16}}{25} = \frac{3}{5}$$

$$\text{sen } \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$A = \frac{5}{3} \cdot \cos x + \sqrt{5} \cdot \text{sen } \frac{x}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} + \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \to A = 2$$

141 Seja *x* um arco do 1º quadrante e $\cos x = \dfrac{m}{2}$. Determine $\cos \dfrac{x}{2}$. $\dfrac{\sqrt{2 + m}}{2}$, $m \geqslant -2$

Resolução:

x é arco do primeiro quadrante.

$$\cos \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{m}{2}}{2}} \to \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2 + m}}{2},\ m \geqslant -2$$

142 Se $\text{tg } \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{6}$, determine sen x. $\dfrac{12}{37}$

Resolução:

$$\text{sen } x = \frac{2 \text{ tg } \frac{x}{2}}{1 + \text{tg}^2 \frac{x}{2}} \to \text{sen } x = \frac{2 \cdot \frac{1}{6}}{1 + \frac{1}{36}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{37}{36}} = \frac{12}{37}$$

143 Se $\text{tg}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$, determine tg x. $\frac{4}{3}$

Resolução:

$$\text{tg}\,x = \frac{2\,\text{tg}\,\frac{x}{2}}{1 - \text{tg}^2\,\frac{x}{2}} = \frac{2 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}$$

144 Se $\text{sen}\,\frac{x}{2} = \frac{1}{7}$, determine cos x, sabendo que *x* é um arco do 1º quadrante. $\frac{47}{49}$

Resolução:

$\text{sen}\,\frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}$ → elevando ao quadrado os dois membros, temos:

$$\frac{1}{49} = \frac{1 - \cos x}{2} \rightarrow 1 - \cos x = \frac{2}{49} \rightarrow \cos x = \frac{47}{49}$$

145 Determine o conjunto verdade da equação $4\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2} + 4\cos x = 3$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$$4\,\text{sen}^2\,\frac{x}{2} + 4\cos x = 3$$

$$\cancel{4} \cdot \frac{1 - \cos x}{\cancel{2}} + 4\cos x = 3 \rightarrow 2(1 - \cos x) + 4\cos x = 3 \rightarrow$$

$$\rightarrow 2 - 2\cos x + 4\cos x = 3 \rightarrow 2\cos x = 1 \rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{3} \rightarrow x = \pm\frac{\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } x = \frac{5\pi}{3}$$

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$$

146 O valor numérico da expressão $A = 4 \text{ sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x$, para $x = \frac{\pi}{4}$, é:

a) 0

b) 1

c) 2

d) −1

e) −2

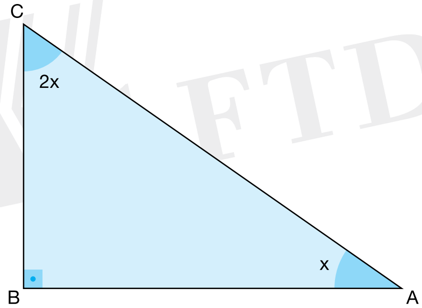
Resolução:

$A = 4 \text{ sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} \cdot \cos x$, para $x = \frac{\pi}{4}$

$\text{sen } 2x = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \rightarrow \text{sen } x = 2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}$

$A = 2 \text{ sen } x \cdot \cos x = \text{sen } 2x \rightarrow A = \text{sen } 2 \cdot \frac{\pi}{4} = \text{sen } \frac{\pi}{2} \rightarrow A = 1$

147 Determine $\text{sen } \frac{x}{2}$ no triângulo da figura a seguir. $\frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$



Resolução:

O triângulo é retângulo; então, $x + 2x = 90° \rightarrow 3x = 90° \rightarrow x = 30°$

$$\text{sen } \frac{30°}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$$

Portanto, $\text{sen } \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{3}}}{2}$.

148 Se cossec x $= \frac{5}{3}$ e $\frac{\pi}{2} < x < \pi$, determine $\text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right)$. $\frac{1}{3}$

Resolução:

Se cossec x $= \frac{5}{3} \rightarrow \text{sen } x = \frac{3}{5} \rightarrow \cos^2 x = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 x}$

No segundo quadrante, cos x < 0; portanto, $\cos x = -\sqrt{1 - \frac{9}{25}} = -\frac{4}{5}$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos(\pi - x)}{1 + \cos(\pi - x)}}$$

$$\cos x = -\frac{4}{5} \rightarrow \cos(\pi - x) = -\cos x = \frac{4}{5}$$

$$\text{tg}\left(\frac{\pi - x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{4}{5}}{1 + \frac{4}{5}}} = \frac{1}{3}$$

149 Se $\text{sen}^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$, determine o valor de sen x, sabendo que *x* é um arco do 2º quadrante. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

Resolução:

$$\text{sen}^2 \frac{x}{2} - \cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{3}$$

$$\left(\sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}}\right)^2 - \left(\sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}\right)^2 = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{1 - \cos x}{2} - \frac{1 + \cos x}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow \frac{-2\cos x}{2} = \frac{1}{3} \rightarrow$$

$$\cos x = -\frac{1}{3} \rightarrow \text{sen } x = \pm\sqrt{1 - \frac{1}{9}} = \pm\sqrt{\frac{8}{9}}$$

No segundo quadrante, o seno é positivo; portanto, sen x $= \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

150 Se $\text{tg } \frac{\theta}{2} = \text{sen } \theta$ e $\cos \theta \neq 0$, determine o valor de tg θ. 0

Resolução:

$\text{tg } \frac{\theta}{2} = \text{sen } \theta; \cos \theta \neq 0$

$$\text{tg } \theta = \frac{2 \text{ tg } \frac{\theta}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \text{ sen } \theta}{1 - \text{sen}^2 \theta} = \frac{2 \text{ sen } \theta}{\cos^2 \theta} = 2 \text{ tg } \theta \cdot \sec \theta$$

$2 \text{ tg } \theta \cdot \sec \theta - \text{tg } \theta = 0 \rightarrow \text{tg } \theta (2 \sec \theta - 1) = 0 \rightarrow \text{tg } \theta = 0$

$\theta = 0$ e $\sec \theta = \frac{1}{2}$ (não existe θ)

$\therefore \text{ tg } \theta = 0$

151 Determine a soma das raízes da equação $\text{sen } x = \text{sen } \frac{x}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. 4π

Resolução:

$\text{sen } x = \text{sen } \frac{x}{2}; [0, 2\pi]$

$2 \text{ sen } \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \text{sen } \frac{x}{2} \rightarrow \text{sen } \frac{x}{2} \left(2 \cos \frac{x}{2} - 1\right) = 0$

$\text{sen } \frac{x}{2} = 0$ ou $2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0$

Se $\text{sen } \frac{x}{2} = 0 \rightarrow \text{sen } \frac{x}{2} = \text{sen } 0 \rightarrow x = 0$ ou $x = 2\pi$

Se $2 \cos \frac{x}{2} - 1 = 0 \rightarrow \cos \frac{x}{2} = \frac{1}{2} \rightarrow \cos \frac{x}{2} = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{x}{2} = \pm \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \frac{2\pi}{3} + 4k\pi \rightarrow x = \frac{2\pi}{3}$ ou $x = -\frac{2\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$

$\text{soma} = 0 + 2\pi + \frac{2\pi}{3} + \frac{4\pi}{3} = 4\pi$

152 Transforme cos 8x + cos 4x em produto. $2\cos 6x \cdot \cos 2x$

Resolução:

$$\cos 8x + \cos 4x = 2\cos\frac{8x + 4x}{2} \cdot \cos\frac{8x - 4x}{2} = 2\cos 6x \cdot \cos 2x$$

153 Simplifique a expressão: $\dfrac{\cos 50° + \cos 10°}{\text{sen } 50° - \text{sen } 10°}$. $\text{cotg } 20°$

Resolução:

$$\frac{\cos 50° + \cos 10°}{\text{sen } 50° - \text{sen } 10°} = \frac{2\cos\frac{50° + 10°}{2} \cdot \cos\frac{50° - 10°}{2}}{2\,\text{sen}\frac{50° - 10°}{2} \cdot \cos\frac{50° + 10°}{2}} = \frac{2\cos 30° \cdot \cos 20°}{2\,\text{sen } 20° \cdot \cos 30°} = \text{cotg } 20°$$

154 Fatorando a expressão $\text{sen}^2 2x - \text{sen}^2 x$, obtemos:

a) $2\,\text{sen } x \cdot \text{sen } 3x$

b) $\text{sen } x \cdot \text{sen } 3x$

c) $2\,\text{sen}\frac{x}{2} \cdot \text{sen}\frac{3x}{2}$

d) $2\,\text{sen}\frac{3x}{2} \cdot \text{sen}\frac{3x}{2}$

e) $2\,\text{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$

Resolução:

Lembrando que: $\text{sen } m - \text{sen } n = 2\,\text{sen}\frac{m - n}{2} \cdot \cos\frac{m + n}{2}$ e

$\text{sen } m + \text{sen } n = 2\,\text{sen}\frac{m + n}{2} \cdot \cos\frac{m - n}{2}$, teremos:

$$\text{sen}^2 2x - \text{sen}^2 x = (\text{sen } 2x - \text{sen } x) \cdot (\text{sen } 2x + \text{sen } x) =$$

$$= \left(2\,\text{sen}\frac{2x - x}{2} \cdot \cos\frac{2x + x}{2}\right) \cdot \left(2\,\text{sen}\frac{2x + x}{2} \cdot \cos\frac{2x - x}{2}\right) =$$

$$= 2\,\text{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} \cdot 2\,\text{sen}\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} = 2\,\text{sen}\frac{x}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot 2\,\text{sen}\frac{3x}{2} \cdot \cos\frac{3x}{2} =$$

$$= \text{sen } 2 \cdot \frac{x}{2} \cdot \text{sen } 2 \cdot \frac{3x}{2} = \text{sen } x \cdot \text{sen } 3x$$

155 Transforme em produto a soma $A = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$. $4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

Resolução:

$A = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x$

$A = 2 \cos \frac{3x + x}{2} \cdot \cos \frac{3x - x}{2} + 2 \cos \frac{7x + 5x}{2} \cdot \cos \frac{7x - 5x}{2}$

$A = 2 \cos 2x \cdot \cos x + 2 \cos 6x \cdot \cos x$

$A = 2 \cos x (\cos 2x + \cos 6x)$

$A = 2 \cos x \left(2 \cos \frac{6x + 2x}{2} \cdot \cos \frac{6x - 2x}{2}\right)$

$A = 2 \cos x \cdot (2 \cos 4x \cdot \cos 2x)$

$A = 4 \cos x \cdot \cos 2x \cdot \cos 4x$

156 Ao transformarmos em produto a soma $A = \cos 3x - \cos x$, obtemos:

a) $2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } x$

b) $2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x$

c) $-2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x$

d) $-4 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } x$

e) $-4 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$

Resolução:

$A = \cos 3x - \cos x$

$A = -2 \text{ sen } \frac{3x + x}{2} \cdot \text{sen } \frac{3x - x}{2} = -2 \text{ sen } 2x \cdot \text{sen } x = -2 \cdot 2 \text{ sen } x \cdot \cos x \cdot \text{sen } x$

$A = -4 \text{ sen}^2 x \cdot \cos x$

157 Assinale a alternativa correta:

a) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = \text{sen } 60°$

b) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = 2 \text{ sen } 10° \cdot \cos 10°$

c) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = \text{sen } 80°$

d) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = \text{sen } 10°$

e) $\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = \cos 10°$

Resolução:

Alternativa *e*

$\text{sen } 40° + \text{sen } 20° = 2 \text{ sen } 30° \cdot \cos 10° = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos 10° = \cos 10°$

158 Fatore a expressão: $A = \dfrac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 2x}$. $2 \cos x$

Resolução:

$$A = \frac{\text{sen } 3x + \text{sen } x}{\text{sen } 2x} = \frac{2 \text{ sen } \frac{3x + x}{2} \cdot \cos \frac{3x - x}{2}}{\text{sen } 2x} = \frac{2 \text{ sen } 2x \cdot \cos x}{\text{sen } 2x} = 2 \cos x$$

159 Fatore a expressão: $A = \text{sen}^2 4x - \text{sen}^2 2x$. $A = \text{sen } 6x \cdot \text{sen } 2x$

Resolução:

$A = \text{sen}^2 4x - \text{sen}^2 2x$

$A = (\text{sen } 4x + \text{sen } 2x) \cdot (\text{sen } 4x - \text{sen } 2x) = 2 \text{ sen } \dfrac{4x + 2x}{2} \cdot \cos \dfrac{4x - 2x}{2} \cdot 2 \text{ sen } \dfrac{4x - 2x}{2} \cdot \cos \dfrac{4x + 2x}{2}$

$A = 2 \text{ sen } 3x \cdot \cos x \cdot 2 \text{ sen } x \cdot \cos 3x$

$A = 2 \text{ sen } 3x \cdot \cos 3x \cdot 2 \text{ sen } x \cdot \cos x$

$A = \text{sen } 2(3x) \cdot \text{sen } 2x = \text{sen } 6x \cdot \text{sen } 2x$

$A = \text{sen } 6x \cdot \text{sen } 2x$

160 Resolva a equação sen 5x = sen x no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\text{sen } 5x = \text{sen } x; [0, 2\pi]$

$\text{sen } 5x - \text{sen } x = 0$

$2 \text{ sen } 2x \cdot \cos 3x = 0$

$\text{sen } 2x = 0$ ou $\cos 3x = 0$

Se $\text{sen } 2x = 0 \rightarrow \text{sen } 2x = \text{sen } 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = \dfrac{k\pi}{2} \rightarrow$

$\rightarrow x = 0, x = \dfrac{\pi}{2}, x = \pi, x = \dfrac{3\pi}{2}, x = 2\pi$

Se $\cos 3x = 0 \rightarrow \cos 3x = \cos \dfrac{\pi}{2} \rightarrow 3x = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \rightarrow x = \pm\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{2k\pi}{3} \rightarrow$

$\rightarrow x = \dfrac{\pi}{6}, x = \dfrac{5\pi}{6}, x = \dfrac{7\pi}{6}, x = \dfrac{11\pi}{6}$

$S = \left\{0, \dfrac{\pi}{2}, \pi, \dfrac{3\pi}{2}, 2\pi, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}\right\}$

161 Resolva a equação sen 7a + 2 sen 3a − sen a = 0. $S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{k\pi}{3} \text{ ou } a = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

sen 7a + 2 sen 3a − sen a = 0

2 sen 3a · cos 4a + 2 sen 3a = 0

2 sen 3a (cos 4a + 1) = 0

sen 3a = 0 ou cos 4a + 1 = 0

Se sen 3a $= 0 \rightarrow$ sen 3a $=$ sen $0 \rightarrow 3a = k\pi \rightarrow a = \frac{k\pi}{3},\ k \in \mathbb{Z}$

Se cos 4a $+ 1 = 0 \rightarrow$ cos 4a $= -1 \rightarrow$ cos 4a $=$ cos $\pi \rightarrow 4a = \pi + 2k\pi \rightarrow a = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

$S = \left\{a \in \mathbb{R} \mid a = \frac{k\pi}{3} \text{ ou } a = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

162 O valor da expressão $A = -2 \text{ sen } \frac{11\pi}{24} \cdot \text{sen } \frac{7\pi}{24}$ é:

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{2}$

c) $-\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{4}$

e) $\frac{\sqrt{3} - \sqrt{2}}{4}$

Resolução:

$A = -2 \text{ sen } \frac{11\pi}{24} \cdot \text{sen } \frac{7\pi}{24} = \cos p - \cos q$

Fazendo $\frac{p + q}{2} = \frac{11\pi}{24}$ e $\frac{p - q}{2} = \frac{7\pi}{24}$, temos o sistema $\begin{cases} p + \cancel{q} = \frac{11\pi}{12} \\ p - \cancel{q} = \frac{7\pi}{12} \end{cases}$

$2p = \frac{18\pi}{12} \rightarrow p = \frac{3\pi}{4}$

Substituindo *p*, temos:

$p + q = \frac{11\pi}{12} \rightarrow q = \frac{11\pi}{12} - \frac{3\pi}{4} \rightarrow q = \frac{\pi}{6}$

$A = \cos p - \cos q$

$A = \cos \frac{3\pi}{4} - \cos \frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2}$

163 Considere a função $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x)$. a) $S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$

a) Resolva a equação $f(x) = 0$ no intervalo $[0, \pi]$.

b) O gráfico de *f* pode interceptar a reta de equação $y = \frac{8}{5}$? Explique sua resposta.

Resolução:

$f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x + \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 5x)$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} + \frac{1}{2}\left(2 \operatorname{sen} \frac{x - 5x}{2} \cdot \cos \frac{x + 5x}{2}\right)$

$f(x) = \frac{\operatorname{sen} 2x}{2} - \operatorname{sen} 2x \cdot \cos 3x = \operatorname{sen} 2x\left(\frac{1}{2} - \cos 3x\right)$

a) $f(x) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x\left(\frac{1}{2} - \cos 3x\right) = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = 0$ ou $\frac{1}{2} - \cos 3x = 0$

Se $\operatorname{sen} 2x = 0 \rightarrow \operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen} 0 \rightarrow 2x = k\pi \rightarrow x = \frac{k\pi}{2} \rightarrow x = 0, x = \frac{\pi}{2}, x = \pi$

Se $\frac{1}{2} - \cos 3x = 0 \rightarrow \cos 3x = \frac{1}{2} \rightarrow \cos 3x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow 3x = \pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$x = \pm\frac{\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \rightarrow x = \frac{\pi}{9}, x = \frac{5\pi}{9}, x = \frac{7\pi}{9}$

$S = \left\{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{\pi}{9}, \frac{5\pi}{9}, \frac{7\pi}{9}\right\}$

b) $f(x) = \operatorname{sen} x \cdot \cos x\,(1 - 2\cos 3x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x\,(1 - 2\cos 3x)$

A imagem da função seno é o intervalo $[-1, 1]$, e a da função $1 - 2\cos 3x$ é o intervalo $[-1, 3]$. Assim, a imagem do produto será o intervalo $[-3, 3]$, que multiplicado por $\frac{1}{2}$ resultará no intervalo $\left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$.

O valor máximo será $\frac{3}{2}$ menor que $\frac{8}{5}$. Logo, o gráfico não intercepta a reta de equação $y = \frac{8}{5}$.

p. 55

164 Demonstre a identidade: $\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 2 - 2\cos^2 x$, sendo $x \neq k\pi$.

Resolução:

$\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 2 - 2\cos^2 x$, sendo $x \neq k\pi$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$\operatorname{sen} 2x \cdot \operatorname{tg} x = 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} =$

$= 2\operatorname{sen}^2 x = 2(1 - \cos^2 x) = 2 - 2\cos^2 x$ (igual ao 2º membro)

165 Mostre que $\dfrac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}^3 x$, com $\operatorname{sen} x \neq 0$.

Resolução:

$$\frac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x} = \operatorname{tg}^3 x, \text{ com } \operatorname{sen} x \neq 0$$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$$\frac{\sec x - \cos x}{\operatorname{cossec} x - \operatorname{sen} x} = \frac{\dfrac{1}{\cos x} - \cos x}{\dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x} = \frac{\dfrac{1 - \cos^2 x}{\cos x}}{\dfrac{1 - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x}}{\dfrac{\cos^2 x}{\operatorname{sen} x}} = \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos^2 x} = \operatorname{tg}^3 x \text{ (igual ao 2º membro)}$$

166 Demonstre a identidade: $\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x \cdot \sec^2 x$.

Resolução:

$\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \operatorname{cotg} x \cdot \sec^2 x$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$$\operatorname{cotg} x + \operatorname{tg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} + \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x$$

Desenvolvendo o segundo membro, temos:

$$\operatorname{cotg} x \cdot \sec^2 x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{1}{\operatorname{sen} x \cdot \cos x} = \sec x \cdot \operatorname{cossec} x$$

Os dois membros representam uma igualdade; então, a identidade se verifica.

167 Podemos dizer que a função $y = \dfrac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x}$ é idêntica a:

a) $\sec x$
b) $2 \sec x$
c) $\operatorname{cossec} x$
d) $2 \operatorname{cossec} x$
e) $\operatorname{tg} x$

Resolução:

$$y = \frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x} + \frac{\cos x}{1 + \operatorname{sen} x} = \frac{1 + 2 \operatorname{sen} x + \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2 + 2 \operatorname{sen} x}{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)} =$$

$$= \frac{2(1 + \operatorname{sen} x)}{\cos x(1 + \operatorname{sen} x)} = \frac{2}{\cos x} = 2 \sec x$$

168 Sejam as identidades:

I. $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x - \text{cotg } x) = 1$

II. $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x + \text{cotg } x) = 1$

III. $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x \cdot \text{cotg } x) = \dfrac{1}{\text{cossec } x \cdot \sec x}$

Podemos afirmar que:

a) I e II são falsas, e III é verdadeira.

b) I é verdadeira, e II e III são falsas.

c) I é falsa, e II e III são verdadeiras.

d) todas são verdadeiras.

e) todas são falsas.

Resolução:

I. (Falsa); $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x - \text{cotg } x) = (\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} - \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right) =$

$= \text{sen}^2 x - \cos^2 x \neq 1.$

II. (Verdadeira); $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x + \text{cotg } x) = (\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot \left(\dfrac{\text{sen } x}{\cos x} + \dfrac{\cos x}{\text{sen } x}\right) =$

$= \text{sen}^2 x + \cos^2 x = 1.$

III. (Verdadeira); $(\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot (\text{tg } x \cdot \text{cotg } x) = (\text{sen } x \cdot \cos x) \cdot \left(\dfrac{\cancel{\text{sen } x}}{\cancel{\cos x}} \cdot \dfrac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\text{sen } x}}\right) =$

$= \text{sen } x \cdot \cos x = \dfrac{1}{\text{cossec } x \cdot \sec x}.$

169 A expressão $\dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x}$ é idêntica a:

a) sen x

b) cos x

c) tg x

d) sec x

e) cossec x

Resolução:

$\dfrac{\text{sen } 2x}{\text{sen } x} - \dfrac{\cos 2x}{\cos x} = \dfrac{2 \cancel{\text{sen } x} \cdot \cos x}{\cancel{\text{sen } x}} - \dfrac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} = 2 \cos x - \dfrac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} =$

$= \dfrac{2 \cancel{\cos^2 x} - 2 \cancel{\cos^2 x} + 1}{\cos x} = \dfrac{1}{\cos x} = \sec x$

170 A expressão $(\text{cotg } x - \text{sen } x)^2 + (1 + \cos x)^2$ equivale a:

a) $\text{cotg}^2 x$
b) $\text{cotg}^2 x + 1$
c) $\text{cossec}^2 x$
d) $\text{cossec}^2 x + 1$
e) $\sec^2 x$

Resolução:

$(\text{cotg } x - \text{sen } x)^2 + (1 + \cos x)^2 =$

$= \text{cotg}^2 x - 2 \frac{\cos x}{\text{sen } x} \cdot \text{sen } x + \text{sen}^2 x + 1 + 2 \cos x + \cos^2 x =$

$= \text{cotg}^2 x - \cancel{2 \cos x} + \cancel{2 \cos x} + \text{sen}^2 x + \cos^2 x + 1 = \text{cotg}^2 x + 2 =$

$= \text{cossec}^2 x - 1 + 2 = \text{cossec}^2 x + 1$

p. 56

171 Desenvolvendo a função $y = \text{sen}^4 x - \cos^4 x$, obtemos:

a) sen 2x
b) −sen 2x
c) tg 2x
d) cos 2x
e) −cos 2x

Resolução:

$y = \text{sen}^4 x - \cos^4 x =$

$= (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) \cdot (\text{sen}^2 x - \cos^2 x) = 1 - \cos^2 x - \cos^2 x =$

$= 1 - 2 \cos^2 x = -\cos 2x$

172 Demonstre a identidade: $(\text{cossec } x - \text{cotg } x)^2 = \frac{(1 - \cos x)^2}{\text{sen}^2 x}$.

Resolução:

$(\text{cossec } x - \text{cotg } x)^2 = \frac{(1 - \cos x)^2}{\text{sen}^2 x}$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$(\text{cossec } x - \text{cotg } x)^2 = \left(\frac{1}{\text{sen } x} - \frac{\cos x}{\text{sen } x}\right)^2 = \left(\frac{1 - \cos x}{\text{sen } x}\right)^2 = \frac{(1 - \cos x)^2}{\text{sen}^2 x}$ (igual ao 2º membro)

173 A expressão tg (45° + x) · cotg (45° − x) é idêntica a:

a) $\dfrac{\text{tg } x + 1}{\text{tg } x - 1}$

b) $\dfrac{1 + \cos x}{1 - \cos x}$

c) $\dfrac{1 + \text{sen } 2x}{1 - \text{sen } 2x}$

d) $\dfrac{\cos 2x}{1 - \cos 2x}$

e) $1 + \text{sen } 2x$

Resolução:

$$\text{tg}(45° + x) \cdot \text{cotg}(45° - x) = \text{tg}(45° + x) \cdot \frac{1}{\text{tg}(45° - x)} =$$

$$= \frac{\text{tg } 45° + \text{tg } x}{1 - \text{tg } 45° \cdot \text{tg } x} \cdot \frac{1 + \text{tg } 45° \cdot \text{tg } x}{\text{tg } 45° - \text{tg } x} = \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} \cdot \frac{1 + \text{tg } x}{1 - \text{tg } x} = \frac{(1 + \text{tg } x)^2}{(1 - \text{tg } x)^2} =$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{tg } x + \text{tg}^2 x}{1 - 2\,\text{tg } x + \text{tg}^2 x} = \frac{\sec^2 x + 2\,\text{tg } x}{\sec^2 x - 2\,\text{tg } x} = \frac{\dfrac{1}{\cos^2 x} + 2\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x} - 2\dfrac{\text{sen } x}{\cos x}} =$$

$$= \frac{1 + 2\,\text{sen } x \cdot \cos x}{1 - 2\,\text{sen } x \cdot \cos x} = \frac{1 + \text{sen } 2x}{1 - \text{sen } 2x}$$

174 Prove que $\cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$.

Resolução:

$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a$

$\cos 2a = \cos^2 a - (1 - \cos^2 a) = 2\cos^2 a - 1$

Então:

$\cos 4a = 2\cos^2 2a - 1 \rightarrow \cos 4a = 2(2\cos^2 a - 1)^2 - 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos 4a = 2(4\cos^4 a - 4\cos^2 a + 1) - 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos 4a = 8\cos^4 a - 8\cos^2 a + 1$ (igual ao 2º membro)

175 Mostre que $\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \text{cotg } x$.

Resolução:

$$\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \text{cotg } x$$

Desenvolvendo o primeiro membro, temos:

$$\frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos x) \cdot (1 + \cos x)}{(1 - \cos x) \cdot (1 + \cos x)}} =$$

$$= \frac{1}{1 + \sec x} \cdot \sqrt{\frac{(1 + \cos x)^2}{1 - \cos^2 x}} = \frac{1}{1 + \sec x} \cdot \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} =$$

$$= \frac{1}{1 + \frac{1}{\cos x}} \cdot \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} = \frac{\cos x}{\cos x + 1} \cdot \frac{1 + \cos x}{\text{sen } x} = \text{cotg } x \text{ (igual ao 2º membro)}$$

Em questões como a 176, as alternativas verdadeiras devem ser marcadas na coluna I, e as falsas, na II.

176 (UFPE) Analise as identidades abaixo:

I – II

F 0 – 0 $\text{sen}^2 x + \cos^2 (2x) = 2$

V 1 – 1 $1 + \text{sen}^4 x = 2 \text{ sen}^2 x + \cos^4 x$

F 2 – 2 $\frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos 2x} = 1 + \text{tg}^2 x$

F 3 – 3 $\text{sen } x \cdot \text{tg } x + \text{sen } x = \sec x$

V 4 – 4 $1 - \text{sen}^2 x = \frac{\text{cotg}^2 x}{1 + \text{cotg}^2 x}$

Resolução:

0 – 0 (Falsa); $\text{sen}^2 x + \cos^2 (2x) = 2$; para $x = 0 \to 0 + 1 = 1$

1 – 1 (Verdadeira); $1 + \text{sen}^4 x = 2 \text{ sen}^2 x + \cos^4 x$

$1 + (1 - \cos^2 x)^2 = 1 + 1 - 2 \cos^2 x + \cos^4 x = 2(1 - \cos^2 x) + \cos^4 x = 2 \text{ sen}^2 x + \cos^4 x$

2 – 2 (Falsa); $\frac{\text{sen}^2 x}{1 + \cos 2x} = 1 + \text{tg}^2 x$

Se $x = 0 \to 0 = 1$

3 – 3 (Falsa); $\text{sen } x \cdot \text{tg } x + \text{sen } x = \sec x$

Se $x = 0 \to 0 + 0 = 1$

4 – 4 (Verdadeira); $1 - \text{sen}^2 x = \frac{\text{cotg}^2 x}{1 + \text{cotg}^2 x}$

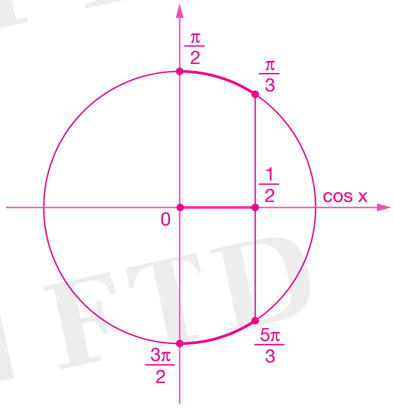
$$\cos^2 x = \frac{\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}}{1 + \frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}} = \frac{\frac{\cos^2 x}{\text{sen}^2 x}}{\frac{\text{sen}^2 x + \cos^2 x}{\text{sen}^2 x}} = \cos^2 x$$

177 Resolva a inequação $0 \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$0 \leqslant \cos x \leqslant \frac{1}{2}$

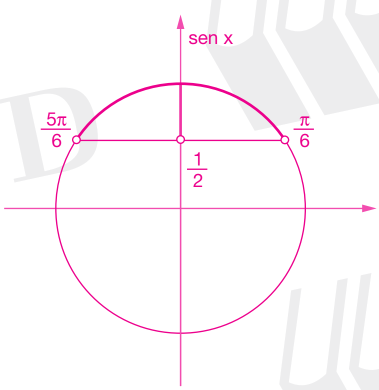


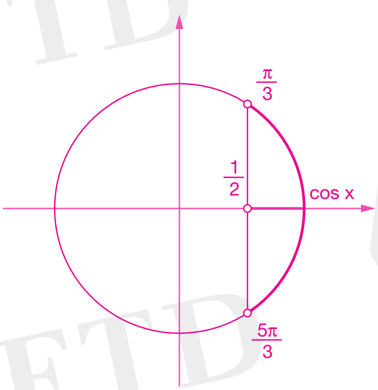
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

178 Quais números satisfazem $\begin{cases} \text{sen } x > \frac{1}{2} \\ \text{e} \\ \cos x > \frac{1}{2} \end{cases}$? $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\text{sen } x > \frac{1}{2}$; $\cos x > \frac{1}{2}$





Os números que satisfazem as duas inequações estão entre $\frac{\pi}{6}$ e $\frac{\pi}{3}$.

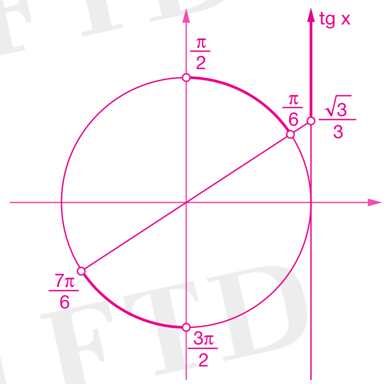
$\therefore\ S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi < x < \frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

179 Resolva a inequação $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$, sendo $0 < x < 2\pi$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

Resolução:

$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3}$



$\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{\sqrt{3}}{3} \rightarrow \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right) > \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{\pi}{2}$ ou

$\frac{7\pi}{6} < x - \frac{\pi}{3} < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}$ ou

$\frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{3} \rightarrow \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6}$ ou

$\frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} < x < \frac{5\pi}{6} \text{ ou } \frac{3\pi}{2} < x < \frac{11\pi}{6}\right\}$

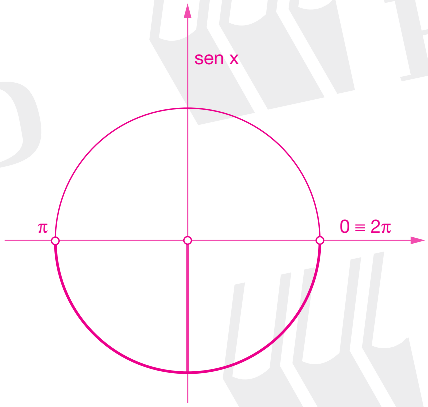
180 Quais os números que satisfazem $(\text{sen } x + \cos x)^2 < 1$?

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

$(\text{sen } x + \cos x)^2 < 1$

$\text{sen}^2 x + 2 \text{ sen } x \cdot \cos x + \cos^2 x < 1 \rightarrow 2 \text{ sen } x \cdot \cos x < 0 \rightarrow \text{sen } 2x < 0$



$\pi + 2k\pi < 2x < 2\pi + 2k\pi \rightarrow \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi$

$S = \{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{2} + k\pi < x < \pi + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

181 Resolva a inequação $\text{sen } x + \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{23\pi}{12}\right\}$

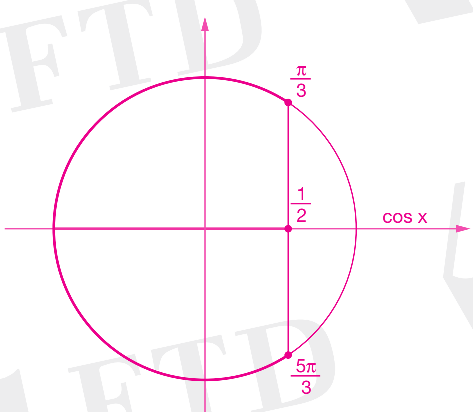
Resolução:

$\text{sen } x + \cos x \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$; $[0, 2\pi]$

$\text{sen } x + \text{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow$ transformando em produto, temos:

$2 \text{ sen } \frac{\pi}{4} \cdot \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{\sqrt{2}}{2} \rightarrow 2 \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant 1 \rightarrow$

$\rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \frac{1}{2} \rightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leqslant \cos \frac{\pi}{3}$



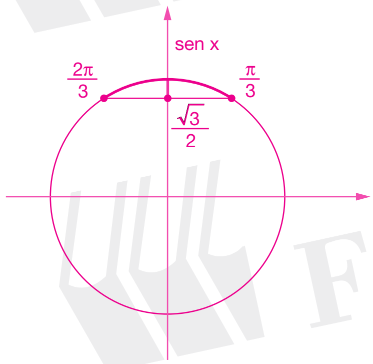
$\frac{\pi}{3} \leqslant x - \frac{\pi}{4} \leqslant \frac{5\pi}{3} \rightarrow \frac{7\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{23\pi}{12}$

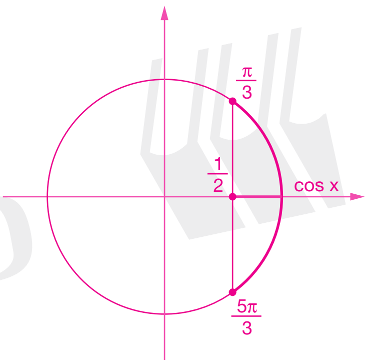
$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{7\pi}{12} \leqslant x \leqslant \frac{23\pi}{12}\right\}$

182 Determine os números que satisfazem $\begin{cases} \text{sen } x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \text{e} \\ \cos x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$ no intervalo $[0, 2\pi]$. $S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$\text{sen } x \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$; $\cos x \geq \dfrac{1}{2}$; $[0, 2\pi]$





O único ponto em comum é $\dfrac{\pi}{3}$.

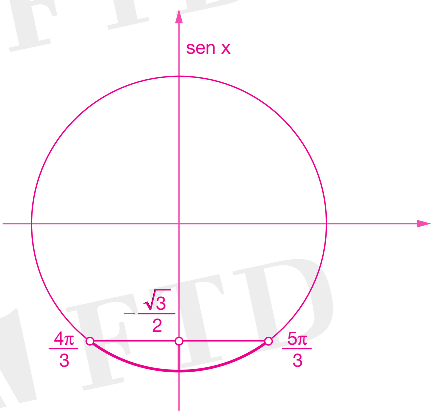
$\therefore S = \left\{\dfrac{\pi}{3}\right\}$

183 Determine os arcos que satisfazem a inequação $\text{sen } x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$\text{sen } x < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$



$\dfrac{4\pi}{3} < x < \dfrac{5\pi}{3}$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi < x < \dfrac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

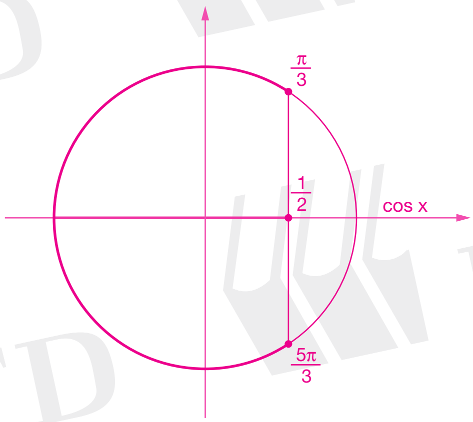
184 Resolva a inequação $2 \cos x - \text{sen}^2 x \leqslant \cos^2 x$. $S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

Resolução:

$2 \cos x - \text{sen}^2 x \leqslant \cos^2 x$

$2 \cos x - \text{sen}^2 x - \cos^2 x \leqslant 0 \rightarrow 2 \cos x - (\text{sen}^2 x + \cos^2 x) \leqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2 \cos x - 1 \leqslant 0 \rightarrow \cos x \leqslant \frac{1}{2}$



$$\frac{\pi}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3}$$

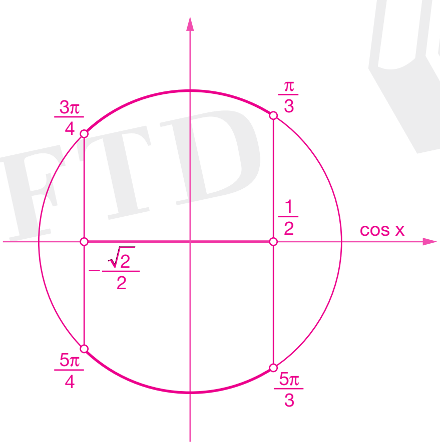
$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

185 Quais os arcos que satisfazem a inequação $-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$ situados na primeira determinação positiva?

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$

Resolução:

$-\frac{\sqrt{2}}{2} < \cos x < \frac{1}{2}$



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{3} < x < \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \frac{5\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{3}\right\}$$

186 Resolva a inequação $\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geqslant 0.$

$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

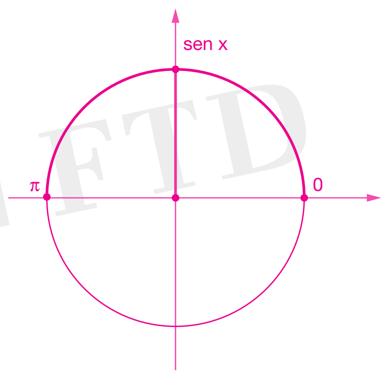
Resolução:

$\text{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right) - \text{sen}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \geqslant 0$

$\text{sen}\,\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\,x - \text{sen}\,\frac{\pi}{3} \cdot \cos x + \cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\,x \geqslant 0 \rightarrow$

$\rightarrow 2\cos\frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\,x \geqslant 0$

Como $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, temos $\text{sen}\,x \geqslant 0$.



$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid 0 + 2k\pi \leqslant x \leqslant \pi + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$

187 Resolva a inequação $2 \cdot (1 - \text{sen}^2\, x) + 5\,\text{sen}\, x - 4 \geqslant 0$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Resolução:

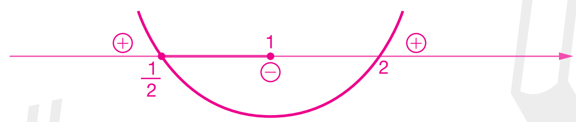
$2 \cdot (1 - \text{sen}^2\, x) + 5\,\text{sen}\, x - 4 \geqslant 0$

$2 - 2\,\text{sen}^2\, x + 5\,\text{sen}\, x - 4 \geqslant 0$

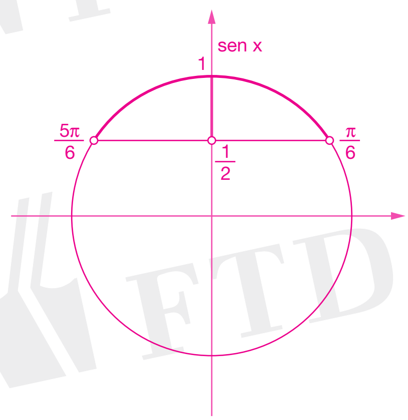
$2\,\text{sen}^2\, x - 5\,\text{sen}\, x + 2 \geqslant 0$

zeros de *f*:

$$\text{sen}\, x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} \rightarrow \text{sen}\, x' = 2 \ \text{e} \ \text{sen}\, x'' = \frac{1}{2}$$



A função seno está definida entre -1 e 1.



$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

188 (Fuvest-SP) Determine os valores de x no intervalo $]0, 2\pi[$ para os quais $\cos x \geqslant \sqrt{3}\ \text{sen}\ x + \sqrt{3}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$$

Resolução:

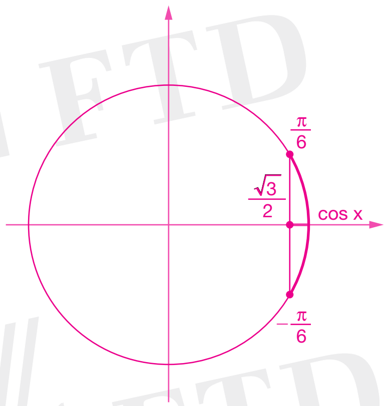
$\cos x \geqslant \sqrt{3}\ \text{sen}\ x + \sqrt{3};\ ]0, 2\pi[$

$\cos x - \sqrt{3}\ \text{sen}\ x \geqslant \sqrt{3}$

Multiplicando a equação por $\frac{1}{2}$, temos:

$\frac{1}{2} \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{sen}\ x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\ \frac{\pi}{3}$, então:

$$\cos \frac{\pi}{3} \cdot \cos x - \text{sen}\ \frac{\pi}{3} \cdot \text{sen}\ x \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$$-\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leqslant x + \frac{\pi}{3} \leqslant \frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \rightarrow$$

$$\rightarrow \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6} + 2k\pi$$

Como $x \in\ ]0, 2\pi[$, então: $\frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}$.

$$S = \left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{3\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{11\pi}{6}\right\}$$